УДК. 51-74+517.2

Храмцова Арина Ивановна,
студент, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: hramcovaarina04@gmail.com
Свердлова Ольга Леонидовна,
к.т.н., доцент, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: olgasv273@mail.ru

КРИВИЗНА КРИВОЙ КАК ОДИН ИЗ ИНСТРУМЕНТОВ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Khramtsova A.I., Sverdlova O.L.

CURVATURE OF THE CURVE AS A METHOD FOR SOLVING ENGINEERPROBLEMS

Аннотация. В статье рассматривается применение методов дифференциальной геометрии при решении инженерных задач. Построена математическая модель криволинейного участка трассы и найдена точка, в которой кривая имеет максимальную кривизну.

Ключевые слова: кривая, дифференциальная геометрия, кривизна кривой, радиус кривизны, переходные кривые.

Abstract. The article discusses the application of the differential geometry’s methods using to solve engineering problems. A mathematical model of the curved section of the route was constructed and the point of the curve with maximum curvature was found.

Keywords: curve; differential geometry; curvature of curve; the radius of the curvature; transition curve.

По словам академика А.Н. Крылова, математика для инженера есть инструмент такой же, как штангенциркуль, зубило, напильник для слесаря. Инженер должен по своей специальности уметь владеть инструментом, но он вовсе не должен уметь его делать, подобно тому, как слесарь не должен сам насекать напильник, но зато – уметь выбрать тот напильник, который ему нужен [1]. Это высказывание не потеряло своей актуальности и в наши дни. Сегодня никакая научная и инженерная работа не возможна без математики. К математическому аппарату инженера можно отнести математические теории, интерпретированные на совокупность объектов конкретной области, составляющей основу инженерного дела [2].

Одним из таких объектов является кривые. Количество всевозможных плоских кривых – великое множество, классифицировать эти кривые для изучения их свойств необычайно сложно, а изучать каждую кривую по отдельности не представляется возможным. К тому же многие известные кривые, имеющие важное практическое приложение, нельзя задавать алгебраическими уравнениями относительно декартовых координат. Например, квадратриса, спираль Архимеда и др. Еще сложнее обстоит дело с пространственными кривыми. Аналитическая геометрия Рене Декарта не дает достаточно методов для изучения кривых и поверхностей, а тем более работать с такими кривыми и поверхностями на практике [3].

Другим, более мощным средством для изучения кривых является дифференциальная геометрия. Исследования методами дифференциальной геометрии применимы сразу ко всем кривым и поверхностям во всех точках, кроме тех, в которых нарушено условие дифференцируемости функции. Дифференциальная геометрия даёт общие способы для нахождения касательной, кривизны, кручения кривой. При этом кривая предполагается заданной уравнениями в какой-либо системе координат, чаще всего параметрическими уравнениями в прямоугольных координатах.

Рассмотрим применение основных понятий дифференциальной геометрии при решении инженерных задач.

Напомним, что кривизна линии в некоторой ее точке характеризует отклонение линии от своей касательной в этой точке. При исследовании кривизны линии часто кривую вблизи рассматриваемой точки заменяют окружностью, имеющей ту же кривизну, что и кривая в этой точке и радиусом кривизны, связаннымсоотношением $R = \frac{1}{K}$, где K – кривизна кривой в данной точке [3].

Решение многих практических задач связано с нахождением кривизны кривой, в частности, при проектировании автомобильных трасс и железных дорог сглаживать участки пути с наибольшей кривизной [4]. Пусть уравнение кривой, описывающий криволинейный участок дороги, имеет вид:

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 1 - 2t^3. \end{cases} \qquad (1)$$

Найдем точку, в которой криволинейный участок дороги имеет наибольшую искривлённость.

Построим данную линию и запишем уравнение траектории движения.Для построения данной кривой будем придавать параметру tнекоторые значения и найдем значения переменных x и y. Данные расчетов представлены в таблице 1, а график исследуемой кривой представлен на рисунке 1.

Таблица 1

Результаты вычисления координат некоторых точек кривой (1)

t	-2	-1,5	-1	0,273	0	0,5	1
x	-1	-0,5	0	1,273	1	1,5	2
y	17	7,75	3	0,96	1	0,75	-1

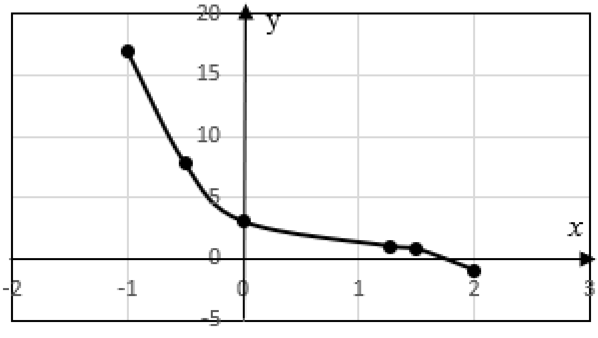

Рисунок 1 – График функции, отображающий криволинейный участок дороги

При построении математических моделей участков трассы зачастую параметрические уравнения кривой приводят к уравнению с двумя переменными, т.е. к явному виду $y = f(x)$. Выполнив преобразования в уравнении (1), получим:

$$y = 1 - 2\cdot(x-1)^3 , \qquad (2)$$

где $t = x - 1$.

Таким образом, траектория движения представляет собой кубическую параболу. Найдем точку, в которой данная линия имеет наибольшую кривизну.

Для нахождения кривизна данной кривой воспользуемся формулой [3]:

$$K = \frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (3)$$

Учитывая, что

$$y' = -6(x-1)^2,\ y'' = -12(x-1), \qquad (4)$$

и подставляя (4) в (3), получаем

$$K(x) = \frac{|-12(x-1)|}{\left[1+\left(-6(x-1)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{12(x-1)}{\left[1+36(x-1)^4\right]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (5)$$

На основании формулы (5) формируем математическую модель задачи [5], которая будет иметь вид: найти такое значение x, где $x \in [1; +\infty)$, при котором

$$K(x) = \frac{12(x-1)}{\left[1+36(x-1)^4\right]^{\frac{3}{2}}} \to \max. \qquad (6)$$

Для решения поставленной задачи находим $K'(x)$:

$$K'(x) = \frac{12\left(1+36(x-1)^4\right)^{\frac{3}{2}} - 12(x-1)\cdot\dfrac{3}{2}\left(1+36(x-1)^4\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 36\cdot 4(x-1)^3}{\left(\left(1+36(x-1)^4\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{12\left[1-180(x-1)^4\right]}{\left[1+36(x-1)^4\right]^{\frac{5}{2}}}.$$

Стационарную точку определим из уравнения $K'(x) = 0$, т.е.

$$\frac{12\left[1-180(x-1)^4\right]}{\left[1+36(x-1)^4\right]^{\frac{5}{2}}} = 0. \qquad (7)$$

Заметим, что $K'(x)=0$, когда $12\left[1-180(x-1)^4\right]=0$ (8). Решая уравнение (8), получим $x=\frac{1}{\sqrt[4]{180}}+1$ или $x\approx 1{,}273$. Характер полученного экстремума представлен на рисунке 2.

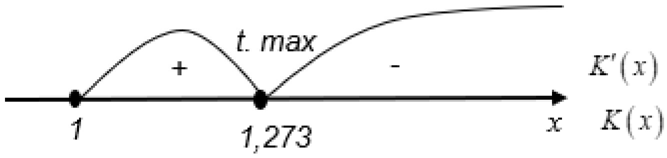

Рисунок 2 – Исследование функции $K(x)$ экстремум

Подставляя полученное значение $x\approx 1{,}273$ в (5) находим наибольшую кривизну на заданном интервале:

$$K_{\max}=K(1{,}273)=\frac{12(1{,}273-1)}{\left(1+36(1{,}273-1)^4\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3{,}276}{1{,}315}\approx 2{,}491 \tag{8}$$

Точка с ординатой $y(1{,}273)\approx 0{,}96$ имеет наибольшую кривизну. На рисунке 3 стрелкой указана точка, в которой кривая $y=1-2\cdot(x-1)^3$ имеет наибольшую искривленность на промежутке $x\in[1;+\infty)$.

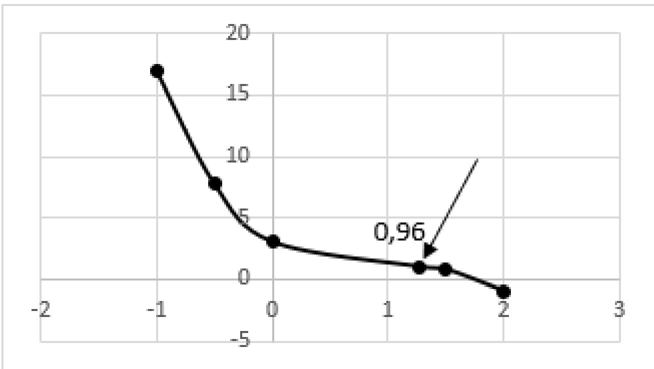

Рисунок 3 – Максимальная кривизна функции $y=1-2\cdot(x-1)^3$ на интервале $[1;+\infty)$

Учитывая, что $R=\frac{1}{K}$, можно увидеть непосредственную связь между второй производной функции и радиусом кривизны графика функции $y=f(x)$ в соответствующей точке:

$$R=\frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}. \tag{9}$$

Чем меньше радиус кривизны, тем больше изогнута линия в данной точке. Если радиус кривизны не существует или равен бесконечности, то и вторая производная не существует или равна нулю и обратно. В точках перегиба линия или не имеет радиуса кривизны, или ее радиус кривизны равен бесконечности. Например, в точке M линия AMB на рисунке 4 имеет перегиб, так как слева от точки M радиус кривизны всюду равен 1, радиус кривизны равен 2 [6]. В точке M линия AMB не является гладкой в смысле кривизны, так как, не смотря на кажущуюся плавность, ее кривизна в этой точке терпит разрыв. Слева от точки $K=1$, а справа $K=\frac{1}{2}$. Убедиться в этом можно непосредственным вычислением.

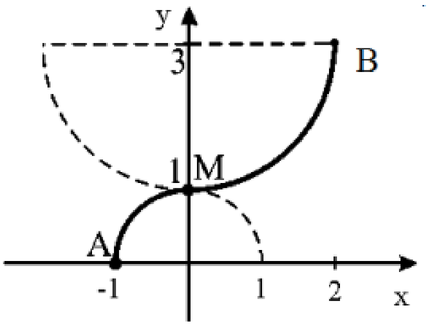

Рисунок 4 – Изменения радиуса кривизны в точках перегиба

Значит, для того чтобы линия была гладкой в смысле кривизны необходимо, существование непрерывной кривизны, т.е. непрерывной второй производной. Учитывая, что при движении по окружности радиуса R величина центробежной силы определяется формулой

$$F_{Ц}=\frac{mV^2}{R} \tag{10}$$

и сила направлена по радиусу к центру окружности, то при движении с постоянной скоростью по произвольной кривой, сила тоже будет определяться по формуле (10), где под R понимается радиус кривизны в данной точке. Поэтому при движении с постоянной скоростью, сила будет испытывать разрывы непрерывности в точках разрыва непрерывности кривизны линии, по которой происходит движение. Во избежание подобных ситуаций, повороты осуществляют так, чтобы кривизна кривой менялась непрерывно. Для этого прямолинейный участок, имеющий нулевую кривизну, соединяют с дугой окружности с помощью переходных кривых, допускающих непрерывный переход до кривизны окружности $\frac{1}{R}$. В качестве подобных кривых применяются [7]:

1) кубическая парабола $y=\frac{x^3}{6q}$; 2) лемниската Бернулли $r^2=2a^2\cos 2\varphi$;

3) клотоида $\begin{cases} x=\int\limits_0^s \cos\frac{s^2}{2k}\,ds, \\ y=\int\limits_0^s \sin\frac{s^2}{2k}\,ds. \end{cases}$

В заключение можно сказать следующее: будущему инженеру при изучении некоторых объектов в конкретной области важно не только углублять свои знания, но и видеть, как эти знания можно применить на практике. Примером могут служить основные понятия дифференциальной геометрии, которые должны быть учтены при проектировании современных автомобильных и железных дорог, чтобы не допустить ускорения, при котором инерционные силы превысят границы безопасности, а также знать, как максимально можно сгладить эти участки с помощью переходных кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шипачев, В.С.** Высшая математика: Учеб. для вузов, 6-е изд., стер. / В.С. Шипачев. – М: Высш. шк., 2003. – 479 с.: ил. – 15000 экз. – ISBN5-06-003959-5. – Текст: непосредственный.

2. **Сигорский, В.П.** Математический аппарат инженера. Издание 2-е, стереотипное / В.П. Сигорский. – Киев: Техніка, 1977. – 768 с.

3. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.I. / Н. С. Пискунов. – М: Интеграл-Пресс, 2006. – 416 с. Библиогр.: с. 60-65. – 3000 экз. – ISBN 5-89602-012-0 (т. I). – Текст: непосредственный.

4. **Забелина, К.В.** О влияния кривизны на проектирования трасс автомобильных дорог / К.В. Забелина, Е.С. Федоровских. – Текст: непосредственный – Екатеринбург: ФГБОУ ВО «Уральский гос. лесотехнический университет», 2023.

5. **Свердлова, О.Л.** Применение производной функции при решении оптимизационных задач / О.Л. Свердлова, Л.М. Кондратьева, В.В. Давидюк // Современные технологии и научно-технический прогресс: Междунар. научн.-техн. конф. имени проф. В.Я. Баденикова: Тез. докл. – Ангарск: ФГБОУ ВО «АнГТУ», 2023.

6. **Золкина, Л.А.** Кривизна и ее приложения: методические указания для студентов лесоинженерного факультета специальности «Автомобильные дороги и аэродромы» / Л.А. Золкина, Е.С. Плотникова. – Текст: непосредственный.– Екатеринбург: Редакционно-издательский отдел УГЛТУ,2012. – 30 с. – Библиогр.: с. 25-30.

7. Проектирование переходных кривых. – Текст: электронный. – URL: https://studme.org/ps://studme.org/271702/stroitelstvo/proektirovanie_perehodnyh_krivyh?ysclid=lvna9u1csc520784888 (дата обращения 15.04.2024).