СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р МЭК 61508-2012. Функциональная безопасность систем электрических, электронных, программируемых электронных, связанных с безопасностью. URL: http://docs.cntd.ru/
2. ГОСТ Р МЭК 61511-1-2018. Безопасность функциональная. Системы безопасности приборные для промышленных процессов. URL: http://docs.cntd.ru/
3. Об утверждении Федеральных норм и правил в области промышленной безопасности «Общие правила взрывобезопасности для взрывопожароопасных химических, нефтехимических и нефтеперерабатывающих производств»: приказ Ростехнадзора от 15 декабря 2020 года № 533. URL: http://www.gosnadzor.ru/

УДК 681.5

Истомин Андрей Леонидович,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: a.l.istomin@mail.ru
Кривов Максим Викторович,
заведующий кафедрой «Вычислительные машины и комплексы»,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: vmk@angtu.ru
Истомина Алена Андреевна,
доцент кафедры «Технология электрохимических производств»,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: alenaist@yandex.ru

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОДЪЕМОМ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ

Istomin A.L., Krivov M.V., Istomina A.A.

THE PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IN THE PROBLEM OF CONTROLLING THE RISE OF A METEOROLOGICAL ROCKET

Аннотация. *На основе принципа максимума Понтрягина решена задача подъема ракеты на максимальную высоту. Решение получено в аналитическом виде.*

Ключевые слова: *оптимальное управление, принцип максимума, управление ракетой.*

Abstract. *Based on the Pontryagin maximum principle, the problem of lifting the rocket to the maximum height has been solved. The solution is obtained in an analytical form.*

Keywords: *optimal control, maximum principle, rocket control.*

При составлении модели движения ракеты примем допущение о незначительном влиянии аэродинамического сопротивления. Также будем считать значение ускорения свободного падения постоянным, не зависящим от высоты подъема ракеты. Тогда изменения скорости набора высоты, движения и массы простой метеорологической ракеты в виде уравнений Коши можно описать следующим образом

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\beta \cdot u}{m} - g, \\ \frac{dm}{dt} = -u, \end{cases} \tag{1}$$

где h – высота подъема ракеты, м; v – скорость движения ракеты, м/с; β – импульс двигателя ракеты, м/с; u – массовый расход топлива, кг/с; m – масса ракеты, кг; g – ускорение свободного падения, м/с^2.

Граничные условия для переменных в начальный $t_н = 0$ момент времени:

$$h(0) = 0,\ v(0) = 0,\ m(0) = M, \tag{2}$$

где M - масса ракеты с топливом.

Управлением ракеты является массовый расход топлива u. Требуется найти управление $u(t)$, позволяющее поднять ракету на наибольшую высоту

$$J = \int_0^T \frac{dh}{dt} dt = \int_0^T v dt \to \max \tag{3}$$

при выполнении ограничения

$$0 \le u(t) \le U_{\max} . \qquad (4)$$

С учетом того, что в наивысшей точке подъема скорость ракеты равна нулю, а масса ракеты равна ее массе без топлива, введем граничные условия в момент времени $t = T$

$$v(T) = 0 ,\ m(T) = M_0 , \qquad (5)$$

где M_0 – масса пустой ракеты.

Максимальная высота $h(T)$ и время управления T неизвестны и подлежат определению в результате нахождения оптимального управления.

При использовании принципа максимума Понтрягина гамильтониан задачи примет вид

$$\begin{aligned} H = \psi_0 v + \psi_1 v + \psi_2(\beta u / m - g) + \\ + \psi_3(-u). \end{aligned} \qquad (6)$$

Рассматривая в гамильтониане только члены, зависящие от искомого управления u , получим из выражения (6)

$$\bar{H} = u(\psi_2 \beta / m - \psi_3) . \qquad (7)$$

Чтобы гамильтониан (6) принимал максимальное значение, необходимо всегда, когда $\psi_2 \beta / m - \psi_3 > 0$, обеспечить управление $u(t) = U_{\max}$ и $u(t) = 0$ в случае, когда $\psi_2 \beta / m - \psi_3 \le 0$, т.е.

$$u^*(t) = \begin{cases} U_{\max}, \textit{если}\ \psi_2 \beta / m - \psi_3 > 0, \\ 0, \quad \textit{если}\ \psi_2 \beta / m - \psi_3 \le 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Для нахождения оптимального управления, в том числе количество переключений управления между $u(t) = U_{\max}$ и $u(t) = 0$, необходимо определить выражения для сопряженных функций $\psi_2(t)$ и $\psi_3(t)$, при которых система уравнений (1) удовлетворяет граничным условиям (2) и (5).

Сопряженные переменные определяются уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dh} = 0, \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\dfrac{dH}{dv} = -1 - \psi_1, \\ \dfrac{d\psi_3}{dt} = -\dfrac{dH}{dm} = \psi_2 \dfrac{\beta u}{m^2}. \end{cases} \qquad (9)$$

Общее решение системы уравнений (9) имеет вид

$$\psi_1(t) = S_1 , \qquad (10)$$

$$\psi_2(t) = -t - S_1 t + S_2 , \qquad (11)$$

$$\psi_3(t) = (-t - S_1 t + S_2) \frac{\beta u}{m^2} t + S_3 , \qquad (12)$$

где S_1 , S_2 и S_3 – постоянные интегрирования уравнений (10) – (12).

Для задач со свободным правым концом согласно условиям трансверсальности [1] для сопряженных переменных в конце процесса управления имеем

$$\psi(T) = 0 . \qquad (13)$$

Так как $h(T)$ неизвестно и подлежит определению, из условия (13) для сопряженной переменной $\psi_1(t)$ определим S_1 . С учетом того, что $\psi_1(T) = 0$, а $\psi_1(t) = S_1$, в момент времени $t = T$ имеем $S_1 = 0$. Следовательно, $\psi_1(t) = 0$.

Постоянные интегрирования S_2 и S_3 , и соответственно, сопряженные функции $\psi_2(t)$ и $\psi_3(t)$ найдем после определения T – времени подъема ракеты на максимальную высоту. Для этого проинтегрируем уравнения системы (1).

Очевидно, что в начальный момент времени при $t = 0$ объект функционирует под воздействием управления $u(t) = U_{\max}$.

Общее решение системы уравнений (1) с управляющим воздействием $u(t) = U_{\max}$ выглядит следующим образом

$$m(t) = C_1 - U_{\max} t , \qquad (14)$$

$$v(t) = -\beta \ln(C_1 - U_{\max} t) + gt + C_2 , \qquad (15)$$

$$\begin{aligned} h(t) = -\beta t \ln(C_1 - U_{\max} t) + \frac{C_1 \beta \ln(C_1 - U_{\max} t)}{U_{\max}} - \\ - \frac{gt^2}{2} + \beta t + C_2 t + C_3. \end{aligned} \qquad (16)$$

Постоянные интегрирования в уравнениях (14) – (16) найдем из начальных условий (2).

Так как при $t = 0$ $m(0) = M$ из (14) получим $C_1 = M$, а выражение для массы ракеты на начальном участке примет вид

$$m(t) = M - U_{\max} t . \qquad (17)$$

Поскольку при $t = 0$ $v(0) = 0$ из (15) находим $C_2 = \beta \ln(M)$. Тогда выражение для скорости ракеты на начальном участке примет вид

$$v(t) = -\beta \ln(M - U_{\max} t) + gt + \beta \ln(M) \qquad (18)$$

Наконец при $h(0) = 0$ и с учетом того, что $C_1 = M$ из (16) получим

$$C_3 = -M \beta \ln(M) / U_{\max} .$$

Тогда выражение для высоты подъема ракеты на начальном участке примет вид

$$h(t) = -\beta t \ln(M - U_{\max} t) + \\ + \frac{M\beta \ln(M - U_{\max} t)}{U_{\max}} - \frac{gt^2}{2} + \\ + \beta t + \beta \ln(M) t - \frac{M\beta \ln(M)}{U_{\max}}. \quad (19)$$

В момент времени $t = T$ ракета движется без топлива, т.е. при $u(t) = 0$, а общее решение системы уравнений (1) имеет вид

$$m(T) = \bar{C}_1, \quad (20)$$

$$v(T) = -gt + \bar{C}_2, \quad (21)$$

$$h(T) = -\frac{gt^2}{2} + \bar{C}_2 t + \bar{C}_3. \quad (22)$$

Постоянные интегрирования $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ в уравнениях (20) и (21) найдем из конечных условий (5).

Так как при $t = T$ $m(T) = M_0$ из (20) получим $\bar{C}_1 = M_0$ и выражение для массы ракеты в конце управления

$$m(t) = M_0. \quad (23)$$

Поскольку при $t = T$ $v(T) = 0$ из (21) получим $\bar{C}_2 = gT$. Отсюда выражение для скорости ракеты в конце управления примет вид

$$v(t) = -gt + gT. \quad (24)$$

Время управления T и время смены управляющего воздействия τ находятся из условия неразрывности решения в момент времени τ

$$\begin{cases} M - U_{\max}\tau = M_0, \\ -\beta \ln(M - U_{\max}\tau) + g\tau + \beta \ln(M) = -g\tau + gT. \end{cases}$$

(25)

Подставляя найденные τ и T в уравнения (19) и (22), получим оптимальную траекторию высоты подъема

$$h(t) = -\beta t \ln(M - U_{\max}\tau) + \\ + \frac{M\beta \ln(M - U_{\max}\tau)}{U_{\max}} - \\ - \frac{g\tau^2}{2} + \beta\tau + \beta \ln(M)\tau - \\ - \frac{M\beta \ln(M)}{U_{\max}} - \frac{gT^2}{2} + T^2 + \frac{gT\tau}{2} - \tau^2. \quad (26)$$

В соответствии с принципом максимума в начальный и конечный моменты времени гамильтониан должен быть равен нулю, т.е.

$$\begin{cases} H\big|_{t=0} = \psi_0(t)v(t) + \psi_1(t)v(t) + \\ + \psi_2(t)(\beta u/m - g) + \psi_3(t)(-u) = 0, \\ H\big|_{t=T} = \psi_0(T)v(T) + \psi_1(T)v(T) + \\ + \psi_2(T)(\beta u/m - g) + \psi_3(T)(-u) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Подставим в уравнения системы (26) полученные выражения для переменных и сопряженных функций в начальный и конечный моменты времени.

Так первое уравнение в системе (26) после подстановки выражений (11) и (12), и принимая во внимание, что $t = 0$ и $v(0) = 0$, получим

$$S_2\left(\frac{\beta U_{\max}}{M} - g\right) - S_3 U_{\max} = 0. \quad (28)$$

Второе уравнение в системе (27) после подстановки (11) и (12) и учитывая, что $u(T) = 0$ и $v(T) = 0$, примет вид

$$-gS_2 + gT = 0. \quad (29)$$

Из уравнений (28) и (29) однозначным образом находим постоянные интегрирования S_2 и S_3:

$$S_2 = T, \quad (30)$$

$$S_3 = \frac{\beta T}{M} - \frac{gT}{U_{\max}} \quad (31)$$

и выражения для сопряженных функций:

$$\psi_2(t) = T - t, \quad (32)$$

$$\psi_3(t) = \frac{\beta u T t}{m^2} - \frac{\beta u t^2}{2m^2} + \frac{\beta T}{M} - \frac{gT}{U_{\max}}. \quad (32)$$

Пример. Найти такую функцию расхода топлива, при которой метеорологическая ракета МР-20 поднимется на максимальную высоту. В табл. 1 приведены конструктивные параметры ракеты МР-20 [2].

Граничные условия для переменных в начальный $t_н = 0$ и конечный $t_k = T$ моменты времени:

$h(0) = 0$ м, $v(0) = 0$ м/с, $m(0) = 1620$ кг, $v(T) = 0$ м/с, $m(T) = 420$ кг.

В начальный момент времени при $t_н = 0$ под воздействием управления $u(t) = U_{\max}$ в соответствии с (17), (18) масса и скорость ракеты описывается уравнениями

$$m(t) = 1620 - 50t,$$

$$v(t) = -2011 \cdot \ln(1620 - 50t) + \\ + 9{,}81t + 2011 \cdot \ln(1620),$$

а в конечный момент времени при $t_к = T$, при $u(T) = 0$ решение в соответствии с (23) и (24) имеет вид

$$m(t) = 420,$$

$$v(t) = -9{,}81t + 9{,}81T.$$

Система (25) для данных рассматриваемого примера имеет вид

$$\begin{cases} 1620 - 50\tau = 420, \\ -2011 \cdot \ln(1620 - 50\tau) + 9{,}81\tau + \\ +2011 \cdot \ln(1620) = -9{,}81\tau + 9{,}81T, \end{cases}$$

из которой однозначно определены время смены управляющего воздействия τ и общее время управления T, которые составили $\tau = 24$ и $T = 276{,}73$ секунд. Максимальная высота подъема ракеты составила 346 020 м. Максимальная высота подъема достигается при предельно максимальном расходе топлива. Максимальная скорость подъема - 2475 м/с.

Результаты решения задачи подъема ракеты на максимальную высоту приведены на рис. 1 и 2.

Таблица 1 Параметры ракеты МР-20

Наименование	Обозначение	Единицы измерения
Импульс двигателя	$\beta = 2011$	м/с
Масса пустой ракеты	$M_0 = 420$	кг
Масса ракеты с топливом	$M = 1620$	кг
Предельные границы расхода топлива	$0 \le u \le 50$	кг/с

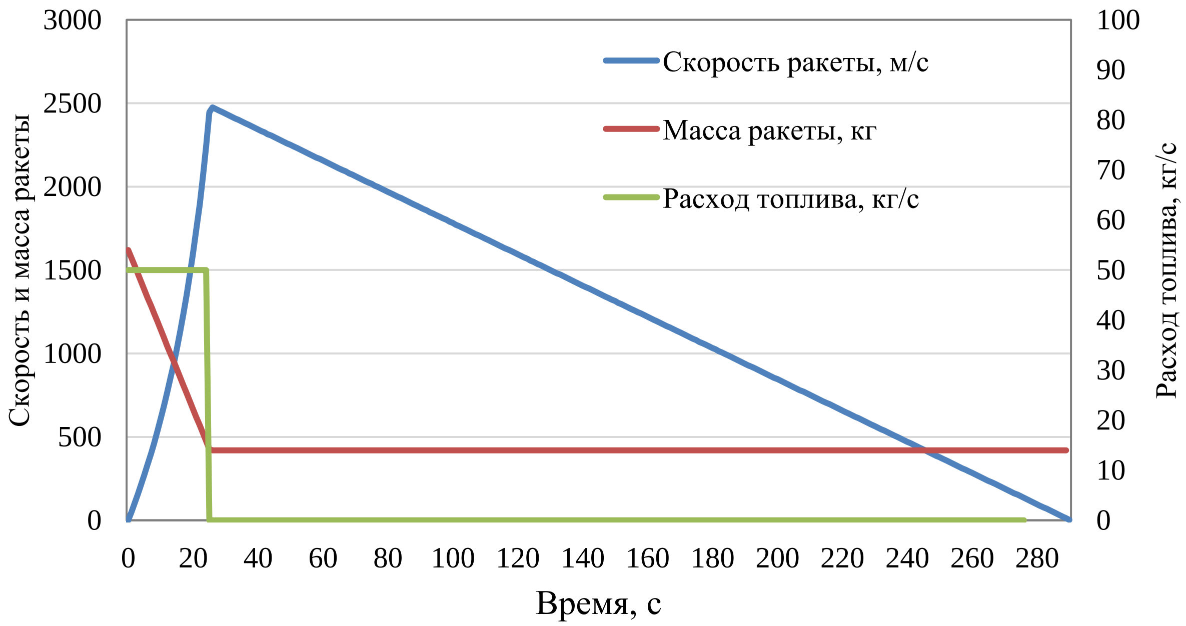

Рисунок 1 - Графики изменения скорости и массы ракеты, расхода топлива за период управления

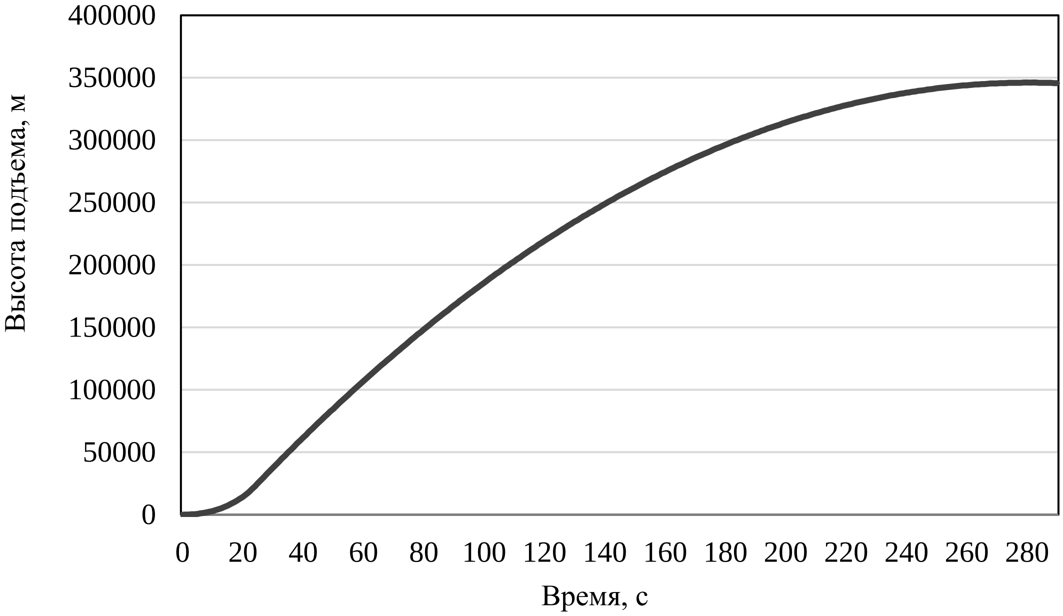

Рисунок 2 - График изменения высоты подъема ракеты за период управления

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. 4-е издание, - М.: Наука, 1983. – 392 с.

2. **Мозжорина Т.Ю., Попов А.С.** Решение задачи оптимального управления вертикальным подъемом ракеты-зонда с уточнением модели аэродинамического сопротивления // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2021. – № 7. – С. 46-50.

3. **Лернер А.Я., Розенман Е.А.** Оптимальное управление. - М.: Энергия, 1970, – 360 с.