УДК 519.9

Киватицкая Александра Васильевна,
студентка гр. ИЦТ-22-1, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: sanchita2003@yandex.ru
Истомин Андрей Леонидович,
д.т.н., профессор, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: a.l.istomin@mail.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ С ДВУМЯ КООРДИНАТАМИ И ОДНИМ УПРАВЛЕНИЕМ В ЗАДАЧЕ С ФИКСИРОВАННЫМИ КОНЦАМИ

Kivatitskaya A.V., Istomin A.L.

OPTIMAL CONTROL OF A LINEAR OBJECT WITH TWO COORDINATES AND ONE CONTROL IN A PROBLEM WITH FIXED ENDS

Аннотация. Поставлена задача оптимального управления объектом с двумя переменными состояния и одним управлением, описываемым системой линейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейная задача оптимального управления, вариационное исчисление.

Abstract. The problem of optimal control of an object with two state variables and one control, described by a system of linear differential equations, is posed.

Keywords: linear optimal control problem, variational calculus

Существует большое количество управляемых объектов, поведение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями относительно переменных состояния объекта. В данной работе исследуется задача оптимального управления объектом с двумя переменными состояния и одним управлением, описываемым следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u, \end{cases} \tag{1}$$

где x_1 и x_2 – переменные состояния объекта управления; u – управляющее воздействие; a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 и b_2 – некоторые постоянные коэффициенты.

В векторной форме система уравнений (1) записывается как

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2}$$

где матрица A и вектор B имеют следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В начальный момент времени объект находится в точке $x_1(0) = x_1^0$ и $x_2(0) = x_2^0$.

Поставим задачу оптимального управления объектом, которая заключается в отыскании такого управления u, при котором объект переходит за время T из начального состояния $x_1(0) = x_1^0$ и $x_2(0) = x_2^0$ в заданное конечное состояние $x_1(T) = x_1^T$ и $x_2(T) = x_2^T$ за минимальный расход энергии управляющего воздействия

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt \to min. \tag{4}$$

Будем полагать, что на управление u не накладывается никаких ограничений. Тогда рассматриваемая задача оптимального управления может быть решена классическим вариационным исчислением.

Гамильтониан задачи в векторной форме примет вид

$$H = \psi(Ax + Bu) = \psi Ax + \psi Bu. \tag{5}$$

Система уравнений для сопряженных переменных в векторной форме принимает вид

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \tag{6}$$

где

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

– матрица, полученная из матрицы A с помощью операции транспонирования.

Тогда расширенная модель задачи с сопряженными переменными имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ \dot{\psi} = -A^*\psi. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) дополняется условием стационарности $\partial H/\partial u = 0$, что приводит к замкнутой системе, позволяющей полностью определить оптимальное управление в виде функции $u(t)$.

Для линейной задачи оптимального управления существует точное решение. Однако для практической реализации удобно численное решение этой задачи. Идея численного решения сводится к решению двухточечной краевой задачи с известными граничными условиями для переменных состояния на правом и левом конце задачи. Недостающие начальные условия для сопряженных переменных ищутся методом «пристрелки», пока не будут выполнены фиксированные граничные условия $x_1(T) = x_1^T$ и $x_2(T) = x_2^T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Болтянский В.Г.** Математические методы оптимального управления (Серия «Физико-математическая библиотека инженера»). – М., 1968. – 409 с.