

ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

Senotova S.A.

PENDULUM NONLINEAR OSCILLATION STABILITY REGION

Аннотация. Построена область асимптотической устойчивости нелинейных колебаний маятника.

Ключевые слова: маятник, нелинейные колебания, устойчивость.

Abstract. The area of asymptotic stability of nonlinear oscillations of the pendulum is plotted.

Keywords: pendulum, nonlinear oscillations, stability.

Уравнение, описывающее нелинейные колебания маятника в сопротивляющейся среде, используется для изучения движения маятника под действием сил сопротивления, например, силы вязкого трения. Это уравнение применяется в разных областях физики, так как многие задачи приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника (рис. 1).

Уравнение нелинейных колебаний маятника в сопротивляющейся среде имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + a \frac{d\theta}{dt} + b \sin \theta$$

где θ – угловая координата, a, b – положительные постоянные. Отсюда получаем систему

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \tag{1}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -a\omega - b \sin \theta.$$

В работе [1] исследуется устойчивость состояния равновесия системы (1):

$$\theta_0 = 0, \omega_0 = 0.$$

С помощью критерия Гурвица доказывается, что положение равновесия асимптотически устойчиво при любых положительных значениях коэффициентов.

Положим $a = 0,1$, $b = 1$. Тогда система (1) примет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \tag{2}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -0,1\omega - \sin \theta.$$

Возьмем в качестве функции Ляпунова квадратичную форму

$$V = \frac{1}{2}(\theta^2 + \omega^2),$$

производная которой в силу системы (2) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \omega (\theta - 0,1\omega - \sin \theta) \quad (3)$$

Чтобы найти границы области асимптотической устойчивости положения равновесия, определим условия смены знака производной. Для этого приравняем производную нулю. В результате получим два уравнения

$$\omega = 0 \quad (4)$$

$$\theta - 0,1\omega - \sin \theta = 0 \quad (5)$$

Подставим значение уравнения (4) в уравнение (5), получим трансцендентное уравнение

$$\theta - \sin \theta = 0. \quad (6)$$

Решая уравнение (6) методом подбора параметра в EXCEL, найдем

$$\theta = 0,178554.$$

Подставляя $\theta = 0,178$, $\omega = 0$ в функцию Ляпунова, найдем ее значение в этой точке

$$V = \frac{(0,178)^2}{2}$$

Замкнутый контур

$$\theta^2 + \omega^2 = (0,178)^2$$

ограничивает область асимптотической устойчивости (рис. 2). Внутри этой области производная функции Ляпунова отрицательна. Следовательно, по теореме Ляпунова, положение равновесия асимптотически устойчиво.

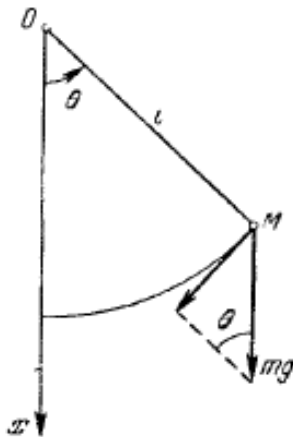


Рисунок 1 – Маятник

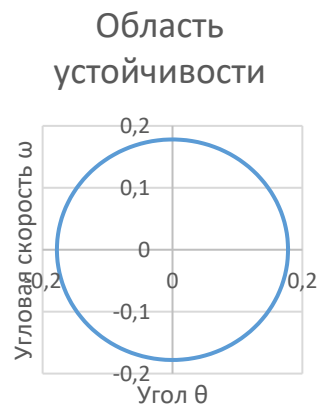


Рисунок 2 – Область устойчивости

ЛИТЕРАТУРА

1. **Б.П. Демидович.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. – 1967 г. – 472 с.