

Бальчугов Алексей Валерьевич,

д.т.н., доцент, ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», email: balchug@mail.ru

Бадеников Артем Викторович,

к.т.н., ректор, ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», e-mail: rector@angtu.ru

ОБЩИЙ ВИД КРИТЕРИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГЛУБИНЫ ВОРОНКИ ПРИ ПЕРЕМЕШИВАНИИ ВОДНОЙ СУСПЕНЗИИ

Balchugov A.V., Badenikov A.V.

GENERAL FORM OF THE CRITERION EQUATION FOR THE DEPTH OF A FUNNEL WHEN STIRRING AN WATER SUSPENSION

Аннотация. Методом анализа размерностей получен общий вид критериального уравнения для глубины воронки при механическом перемешивании водной суспензии активированного угля.

Ключевые слова: теория подобия, метод анализа размерностей, механическое перемешивание, дисковая мешалка, водная суспензия.

Abstract. Using dimensional analysis, a general criterion equation for the depth of a vortex during mechanical mixing of an aqueous suspension of activated carbon was obtained.

Keywords: similarity theory, dimensional analysis, mechanical mixing, disk stirrer, aqueous suspension.

Механическое перемешивание используется для получения водной суспензии активированного угля при очистке воды [1]. С использованием метода анализа размерностей [2-4] получим общий вид критериального уравнения для глубины образующейся воронки при перемешивании суспензии с помощью дисковой мешалки.

Установим параметры процесса, влияющие на глубину воронки при перемешивании (h , м). К таким параметрам относятся: d – диаметр мешалки, м; n – частота вращения мешалки, об/с; ρ – плотность суспензии, кг/м³; μ – коэффициент динамической вязкости суспензии, кг/(м·с); g – ускорение свободного падения, м/с²; H – глубина слоя суспензии в аппарате, м; l – расстояние от диска мешалки до дна аппарата, м. Зависимость глубины воронки от других параметров имеет вид:

$$h = f(d, n, \rho, \mu, g, H, l). \quad (1)$$

Первичными (основными) единицами измерения в механических процессах, к которым относится перемешивание, являются: килограммы (единица измерения массы $[M]$), метры (единица измерения длины $[L]$), секунды (единица измерения времени $[T]$).

Представим единицу измерения глубины воронки через первичные (основные) единицы измерения:

$$[h] = [L]^1 [M]^0 [T]^0. \quad (2)$$

Аналогично запишем для остальных параметров процесса:

$$[d] = [L]^1 [M]^0 [T]^0, \quad (3)$$

$$[n] = [L]^0 [M]^0 [T]^{-1}, \quad (4)$$

$$[\rho] = [L]^{-3} [M]^1 [T]^0, \quad (5)$$

$$[\mu] = [L]^{-1} [M]^1 [T]^{-1}, \quad (6)$$

$$[g] = [L]^1 [M]^0 [T]^{-2}, \quad (7)$$

$$[H] = [L]^1 [M]^0 [T]^0, \quad (8)$$

$$[l] = [L]^1 [M]^0 [T]^0. \quad (9)$$

Внесем сведения о размерности величин в таблицу 1.

Таблица 1

Размерности величин критериального уравнения

Величина	Размерность	Формула размерности	Показатели степени		
			[L]	[M]	[T]
d	м	$[d] = [L]^1 [M]^0 [T]^0$	1	0	0
n	с ⁻¹	$[n] = [L]^0 [M]^0 [T]^{-1}$	0	0	-1
ρ	кг/м ³	$[\rho] = [L]^{-3} [M]^1 [T]^0$	-3	1	0
μ	кг/(м·с)	$[\mu] = [L]^{-1} [M]^1 [T]^{-1}$	-1	1	-1
g	м/с ²	$[g] = [L]^1 [M]^0 [T]^{-2}$	1	0	-2
H	м	$[H] = [L]^1 [M]^0 [T]^0$	1	0	0
l	м	$[l] = [L]^1 [M]^0 [T]^0$	1	0	0

Примем за основные величины d , n , ρ . Число основных величин, как правило, равняется числу первичных (основных) единиц измерения: кг, с, м.

Из уравнений (3, 4, 5) для единиц измерения d , n , ρ составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [d] &= [L]^{l_1} [M]^{m_1} [T]^{t_1} \\ [n] &= [L]^{l_2} [M]^{m_2} [T]^{t_2} \\ [\rho] &= [L]^{l_3} [M]^{m_3} [T]^{t_3} \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Прологарифмируем:

$$\left. \begin{aligned} \lg [d] &= l_1 \lg [L] + m_1 \lg [M] + t_1 \lg [T] \\ \lg [n] &= l_2 \lg [L] + m_2 \lg [M] + t_2 \lg [T] \\ \lg [\rho] &= l_3 \lg [L] + m_3 \lg [M] + t_3 \lg [T] \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Система уравнений (11) будет справедлива (т.е. будет иметь единственное решение), если составленный из коэффициентов уравнения определитель матрицы отличен от нуля.

По методу треугольника вычислим определитель матрицы, составленной по данным таблицы 1 для величин d , n , ρ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & t_1 \\ l_2 & m_2 & t_2 \\ l_3 & m_3 & t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \cdot 0 -$$

$$-3 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$
(12)

Как видно из (12), определитель матрицы не равен нулю, следовательно, основные величины d, n, ρ выбраны верно.

Число переменных величин (параметров процесса) равно $n=8$. Количество первичных (основных) единиц измерения равно $m=3$. В соответствии с теоремой подобия число критериев подобия, описывающих процесс перемешивания, равно $n-m=5$.

Критерии подобия получаются делением каждой оставшейся величины (h, μ, g, H, l) на произведение основных величин (d, n, ρ), возведенных в степени.

Критерии подобия будут иметь вид:

$$\Pi_1 = \frac{h}{d^a \cdot n^b \cdot \rho^c}, \quad (13)$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{d^k \cdot n^l \cdot \rho^m}, \quad (14)$$

$$\Pi_3 = \frac{g}{d^e \cdot n^p \cdot \rho^i}. \quad (15)$$

$$\Pi_4 = \frac{H}{d^r \cdot n^s \cdot \rho^t}. \quad (16)$$

$$\Pi_5 = \frac{l}{d^z \cdot n^x \cdot \rho^y}. \quad (17)$$

Представим зависимость (1) в виде, отражающем связь между безразмерными критериями:

$$\frac{h}{d^a \cdot n^b \cdot \rho^c} = \varphi \left(\frac{\mu}{d^k \cdot n^l \cdot \rho^m}; \frac{g}{d^e \cdot n^p \cdot \rho^i}; \frac{H}{d^r \cdot n^s \cdot \rho^t}; \frac{l}{d^z \cdot n^x \cdot \rho^y} \right), \quad (18)$$

т.е.

$$\Pi_1 = \varphi(\Pi_2; \Pi_3; \Pi_4; \Pi_5).$$

Левая часть уравнения (18) – безразмерная величина, следовательно, справедливо выражение:

$$\frac{[h]}{[d]^a \cdot [n]^b \cdot [\rho]^c} = 1, \quad (19)$$

или

$$\frac{[L]^1 [M]^0 [T]^0}{[L]^a \cdot ([T]^{-1})^b \cdot ([M]^1 [L]^{-3})^c} = 1. \quad (20)$$

Тогда:

$$[M]^{0-c} [L]^{1-a+3c} [T]^{0+b} = 1. \quad (21)$$

Равенство (21) выполняется, если:

$$\left. \begin{aligned} 0 - c &= 0 \\ 1 - a + 3c &= 0 \\ 0 + b &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

откуда:

$$b = 0, \quad c = 0, \quad a = 1.$$

Критерий подобия (13) примет вид:

$$\Pi_1 = \frac{h}{d}.$$

В уравнении (18) безразмерным является также выражение:

$$\frac{\mu}{d^k \cdot n^l \cdot \rho^m}, \quad (23)$$

тогда

$$\frac{[\mu]}{[d]^k \cdot [n]^l \cdot [\rho]^m} = 1, \quad (24)$$

или

$$\frac{[L]^{-1} [M] [T]^{-1}}{[L]^k \cdot ([T]^{-1})^l \cdot ([M] [L]^{-3})^m} = 1. \quad (25)$$

$$[M]^{1-m} [L]^{-1-k+3m} [T]^{-1+l} = 1. \quad (26)$$

Равенство (26) выполняется, если:

$$\left. \begin{aligned} -1 + l &= 0 \\ -1 - k + 3m &= 0 \\ 1 - m &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

откуда:

$$l = 1; \quad m = 1; \quad k = 2.$$

Безразмерный критерий подобия (14) принимает вид:

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{d^2 \cdot n \cdot \rho}.$$

Критерий Π_2 запишем в виде:

$$\Pi_2 = \text{Re} = \frac{d^2 \cdot n \cdot \rho}{\mu}.$$

В уравнении (18) безразмерным является также выражение:

$$\frac{g}{d^e \cdot n^p \cdot \rho^i},$$

тогда

$$\frac{[g]}{[d]^e \cdot [n]^p \cdot [\rho]^i} = 1, \quad (28)$$

или

$$\frac{[L][T]^{-2}}{[L]^e \cdot ([T]^{-1})^p \cdot ([M][L]^{-3})^i} = 1. \quad (29)$$

$$[M]^{-i} [L]^{1-e+3i} [T]^{-2+p} = 1. \quad (30)$$

Равенство (30) выполняется, если:

$$\left. \begin{aligned} -i &= 0 \\ 1-e+3i &= 0 \\ -2+p &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

откуда:

$$p = 2; i = 0; e = 1.$$

Безразмерный критерий подобия (15) принимает вид:

$$\Pi_3 = \frac{g}{d \cdot n^2}.$$

Критерий Π_3 запишем в виде:

$$\Pi_3 = Fr = \frac{d \cdot n^2}{g},$$

где Fr – безразмерный критерий Фруда.

В уравнении (18) безразмерным является также выражение:

$$\frac{H}{d^r \cdot n^s \cdot \rho^t},$$

тогда

$$\frac{[H]}{[d]^r \cdot [n]^s \cdot [\rho]^t} = 1, \quad (32)$$

или

$$\frac{[L]}{[L]^r \cdot ([T]^{-1})^s \cdot ([M][L]^{-3})^t} = 1. \quad (33)$$

$$[M]^{-t} [L]^{1-r+3t} [T]^s = 1. \quad (34)$$

Равенство (34) выполняется, если:

$$\left. \begin{aligned} -t &= 0 \\ 1-r+3t &= 0 \\ s &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (35)$$

откуда: $s = 0; r = 1; t = 0$.

Безразмерный критерий подобия (16) принимает вид:

$$\Pi_4 = \frac{H}{d}. \quad (36)$$

Аналогично критерий Π_5 получим в виде:

$$\Pi_5 = \frac{l}{d}. \quad (37)$$

Преобразуем два последних критерия в один критерий:

$$\Pi_6 = \frac{\Pi_4}{\Pi_5} = \frac{H}{l}. \quad (38)$$

Тогда зависимость между безразмерными критериями подобия для процесса перемешивания принимает вид:

$$\frac{h}{d} = \varphi \left(\frac{d^2 \cdot n \cdot \rho}{\mu}; \frac{d \cdot n^2}{g}; \frac{H}{l} \right), \quad (39)$$

или

$$\frac{h}{d} = \varphi \left(\text{Re}; \text{Fr}; \frac{H}{l} \right), \quad (40)$$

$$\frac{h}{d} = C \cdot \text{Re}^q \text{Fr}^w \left(\frac{H}{l} \right)^f. \quad (41)$$

Значения коэффициента C и показателей степени q, w, f в уравнении (41) определяются экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бальчугов А.В., Бадеников А.В., Ануфриев Е.А.** Расчет равномерности распределения частиц в суспензии с использованием параметров распределения скорости // Сборник научных трудов ангарского государственного технического университета. Ангарск: АНГТУ, 2025. – С. 67-71.
2. **Батунер Л.М., Позин М.Е.** Математические методы в химической технике. Л.: Химия, 1968. – 824 с.
3. **Бальчугов А.В., Бадеников А.В.** Основы научных исследований, организация и планирование эксперимента. Учебное пособие. Москва, Вологда: Инфра-Инженерия, 2026. – 188 с.
4. **Брагинский Л.Н., Бегачев В.И., Барабаш В.М.** Перемешивание в жидких средах. Физические основы и инженерные методы расчета. Л.: Химия, 1984. – 336 с.