земных, наводных и подводных аппаратах. В каждом из этих устройств можно увидеть сервоприводы с похожими конструктивными и схемотехническими решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Российский институт стратегических исследований [Электронный ресурс] // Беспилотные летательные аппараты – новая реальность войны. URL: https://riss.ru/bookstore/journal/20152/problemy-natsionalnoj-strategii-3-30 (дата обращения: 02.10.2019).
2. Открытая наука [Электронный ресурс] //Проектирование и разработка сервопривода.URL:https://cyberleninka.ru/article/v/proektirovanie-i-razrabotka-servoprivoda-dlya-primeneniya-v-bespilotnyh-letatelnyh-apparatah (датаобращения: 01.10.2019).
3. ООО НПП «АВАКС-ГеоСервис» [Электронный ресурс] // Основныепараметры БПЛА DELTA-M. URL: https:// uavsiberia.com/catalog/product/deltam (датаобращения: 05.10.2019).
4. НТС-ЭКО [Электронный ресурс] // Сервопривод: принцип работы, виды. URL: http://www.techtrends.ru/techdept/techarticles/sevoprivod_chto_takoe_princip_vidy.php (датаобращения: 02.10.2019).
5. RadioLaba.ru [Электронныйресурс] // Управление сервоприводом на микроконтроллереURL:https://radiolaba.ru/microcotrollers/upravlenieservoprivodomnamikrokontrollere.html (дата обращения: 04.10.2019).

УДК 531.01 ***Сенотова Светлана Анатольевна,***
к.т.н., доцент, доцент кафедры «Вычислительные машины и комплексы»,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», тел.: 89021723488

О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ НИТИ

Senotova S.A.

ON THE FORMS OF THREAD EQUILIBRIUM

Аннотация. *В статье рассмотрены формы равновесия нити в поле силы тяжести и в центральном поле сил. Получена форма равновесия нити на круговой орбите.*

Ключевые слова: *Формы равновесия нити, орбитальные тросовые системы, эллиптический синус.*

Abstract. *The article considers the forms of balance of the thread in the parallel and in the central field of forces. Form of thread equilibrium in circular orbit is obtained.*

Keywords: *Forms of balance of thread, the orbital tether system, the elliptic sine.*

Формы равновесия нити всегда интересовали ученых [1-7]. Галилей считал, что нить, провисающая под действием собственного веса, принимает форму параболы второго порядка. Однако он ошибался. Лишь через полвека, Иоганном Бернулли, Готфридом Лейбницем и Христианом Гюйгенсом было выведено уравнение цепной линии (рисунок 1) [1].

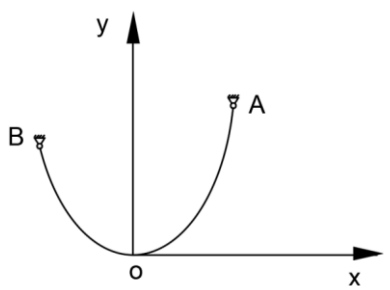

Рисунок 1 – Цепная линия.

Дифференциальные уравнения равновесия нити в плоскости Oxy имеют вид [2]:

$$T\frac{dx}{ds}=H\,,$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=q\,, \qquad (1)$$

где H – проекция натяжения нити на горизонтальную ось x, q – вес единицы длины нити.

В каждой точке нити имеется свое натяжение T. При равновесии натяжение нити будет функцией дуговой координаты

$$T=T(s).$$

Дуговая координата s и декартовы координаты x, y той же точки связаны соотношением

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) с учетом (2) получается уравнение цепной линии в декартовых координатах:

$$y=a\left(ch\frac{x}{a}-1\right),$$

где

$$a=\frac{H}{q}\,.$$

Аппель [3] рассматривает задачу нахождения положения равновесия невесомой нити, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси x. Нить закреплена в двух точках оси x (рисунок 2).

Уравнения равновесия нити имеют вид [2]:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=-\mu\omega^2 y\,, \qquad (3)$$

где T – натяжение нити, s – дуговая координата, μ – линейная плотность нити.

Из уравнений (3) Аппель находит форму равновесия нити, которая задается эллиптическим синусом.

Белецкий В.В. и Левин Е.М. рассматривают движение системы двух материальных точек A и B, соединенных тросом AB, в поле притяжения Земли [4].

Свяжем с центром масс орбитальную систему осей $Cxyz$, в которой ось Cx направлена по радиусу-вектору R_C, ось Cy – по трансверсали и ось Cz – по бинормали к орбите точки C [4].

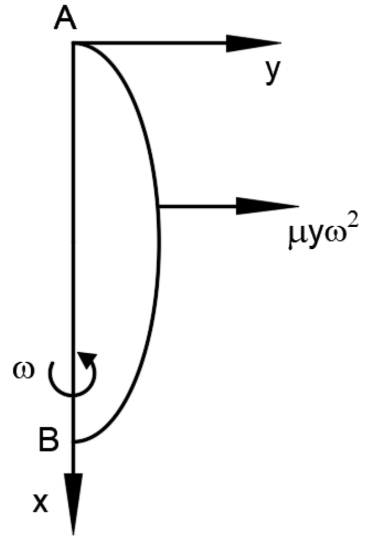

Рисунок 2 – Вращающаяся нить.

Будем считать, что центр масс тросовой системы движется по невозмущенной круговой орбите. Приращение гравитационных сил учтем только в линейном приближении по смещениям относительно центра масс. Трос примем нерастяжимым. В этих предположениях уравнения движения ТС относительно центра масс примут вид [4]:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-2\omega\frac{\partial y}{\partial t}-3\omega^2 x=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial x}{\partial s}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2\omega\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial y}{\partial s}\right), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\omega^2 z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial z}{\partial s}\right),$$

где x, y, z – координаты точек в орбитальных осях $Cxyz$, связанных с центром масс C, ρ – плотность нити, ω – угловая скорость обращения центра масс.

Исследуем равновесную конфигурацию нити, аналогичную цепной линии (рисунок 3).

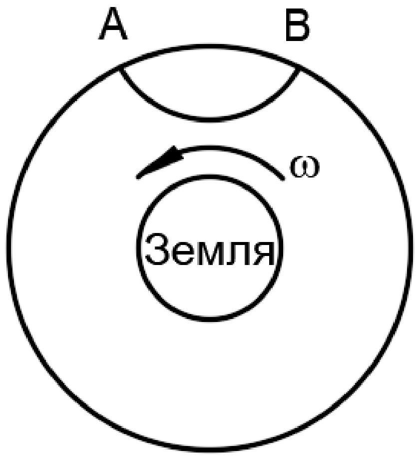

Рисунок 3 – Конфигурация нити в поле притяжения Земли.

В положении равновесия производные по времени равны нулю. Дифференциальные уравнения равновесия нити в плоскости Cxy имеют вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\,s}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = -3\omega^2 x,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\,s}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0. \qquad (5)$$

Для определения формы нити на круговой орбите проведем вычисления, аналогичные вычислениям Аппеля [3].

Из второго уравнения системы (5) получим

$$T\frac{dy}{ds} = H = const, \qquad (6)$$

где H – проекция натяжения T на ось y. Найдем из равенства (6) T и внесем его в первое уравнение системы (5)

$$\frac{d}{ds}\left(H\frac{dx}{dy}\right) = -3\rho\,\omega^2\,x. \qquad (7)$$

Введем обозначения

$$x' = \frac{dx}{dy}; \quad \frac{3\rho\omega^2}{H} = \frac{2}{a^2}$$

и учтем равенство

$$ds = \sqrt{1+x'^2}\,dy = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{x'}dx,$$

которое получается из соотношения (2).

Теперь уравнение (7) примет вид

$$\frac{x'dx'}{\sqrt{1+x'^2}} = -\frac{2x}{a^2}dx,$$

или, интегрируя,

$$\sqrt{1+x'^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2},$$

где новая постоянная b^2 (множитель $1/a^2$ введен для удобства) должна быть положительной (так как левая часть положительна).

Решая последнее уравнение относительно $x' = dx/dy$, получим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a^2}\sqrt{\left(b^2 - x^2\right)^2 - a^4}\,.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$y = a^2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\left(b^2 - a^2 - x^2\right)\left(b^2 + a^2 - x^2\right)}}. \qquad (8)$$

Положим в уравнении (8)

$$x = t\sqrt{b^2 - a^2}\,, \quad k = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$$

Тогда оно примет вид

$$\frac{y\sqrt{b^2 + a^2}}{a^2} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{\left(1 - t^2\right)\left(1 - k^2 t^2\right)}},$$

откуда

$$t = sn\,\frac{y\sqrt{b^2 + a^2}}{a^2},$$

$$x = \sqrt{b^2 - a^2}\,sn\,\frac{y\sqrt{b^2 + a^2}}{a^2}.$$

Таким образом, форма нити имеет вид эллиптического синуса. К такому же выводу приходит С.Ф. Адлай [5]. Без вывода уравне-