УДК 303.7 : 611

Демидченко Егор Александрович,
магистрант кафедры «Промышленная электроника и наноэлектроника», ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», e-mail: demidchenko.ea@yandex.ru
Истомин Андрей Леонидович,
д.т.н., профессор, декан факультета управления и бизнеса ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», e-mail: a.l.istomin@mail.ru

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ АНТРОПОМЕТРИЧЕСКИХ ДАННЫХ В ЗАДАЧЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОТЕЗА КИСТИ РУКИ ЧЕЛОВЕКА

Demidchenko E.A., Istomin A.L.

FACTOR ANALYSIS OF ANTHROPOMETRIC DATA IN THE PROBLEM OF DESIGNING A PROSTHETIC HUMAN HAND

Аннотация. *Методами многомерного статистического анализа проведена математическая обработка антропометрических данных для задачи управления протезом кисти руки человека. В качестве метода исследования был выбран метод главных компонент.*

Ключевые слова: *факторный анализ, метод главных компонент, физиология.*

Abstract. *Mathematical processing of anthropometric data for the task of controlling a prosthetic hand was performed using multidimensional statistical analysis. The principal component method was used as the research method.*

Keywords: *factor analysis, principal component method, physiology.*

Основной целью исследования является нахождение сокращенной системы существенных или значимых показателей в пространстве измеренных антропометрических показателей кисти руки человека для задачи изготовления протеза. В результате проведенного антропометрического исследования кисти руки человека среди респондентов был получен большой блок данных, состоящий из 21 параметра. Многие из этих параметров наверняка имеют тесную связь между результативными и факторными переменными. Поэтому было принято решение с помощью факторного анализа и метода главных компонент выявить эти связи и уменьшить количество параметров, объединив их в кластеры.

Часто корреляционный анализ включает в себя изучение связей не двух, а множества переменных, измеренных в количественной шкале на одной выборке. В этом случае вычисляются корреляции для каждой пары из этого множества переменных. Вычисления обычно проводятся на компьютере, а результатом является корреляционная матрица.

Были изучены связи между 21 показателем, измеренным на выборке численностью N=50 человек в возрасте от 16 до 21 года: Дл – длина кисти с ладонной (флексорной) стороны; Дт – длина кисти с тыльной стороны; л1, л2, л3, л4, л5 – ладонная (флексорная) и Д1, Д2, Д3, Д4, Д5 – тыльная длина каждого пальца; Н – расстояние между лучезапястным суставом и основанием тенара; Ок – обхват кисти на уровне головки пятой пястной кости; Он –обхват первого пальца через середину ногтя; с1ж1 – длины первой и г1д1 - второй дуг тенара соответственно; t2 – толщина пальцев на уровне межпальцевых точек; Сл – ширина лучезапястного сустава, Он – обхват ногтя первого пальца, Ол – обхват первого пальца.

Все данные имеют одну и ту же единицу измерения (сантиметры), поэтому нормирование показателей не проводилось.

Корреляционный анализ был проведен в пакете STADIA. Проведя анализ, стало видно, что почти линейная связь наблюдается только между длиной кисти с ладонной стороны Дл и длиной кисти с тыльной стороны Дт (коэффициент корреляции равен 0,94737). Остальные же связи во многом носят случайный характер и характеризуются как сильной, заметной, умеренной связями, так и отсутствием таковой.

Также видно, что наблюдается сильная положительная корреляционная связь между такими показателями как, например, ладонная (флексорная) длина ладони – Дл и ладонная (флексорная) длина пятого пальца –

л5, между обхватом кисти – Ок и обхватом первого пальца – Он и т.д. В то же время исследование показало, что отсутствует какая-либо связь между длиной кисти с ладонной стороны – Дл и толщиной пальцев на уровне межпальцевых точек - t2, обхватом первого пальца через середину ногтя – Он, расстоянием между первой и второй межпальцевыми точками, измеряемые на ладонной поверхности Н. Сильные и слабые связи можно проследить для всех измеренных показателей. Так как многие показатели сильно коррелируются между собой и измеряют близкие по содержанию данные можно выполнить процедуру снижения размерности и соответственно, объединить их в более «крупные» переменные.

Используем метод главных компонент для снижения размерности признакового пространства и нахождения групп взаимозависимых признаков.

Математическая модель метода главных компонент базируется на логичном допущении, что значения множества взаимосвязанных признаков X порождают общий результат, который можно выразить пространством главных компонент Y. Свяжем главные компоненты и признаки линейной регрессионной зависимостью:

$$Y = XB,$$

где B – ортогональная матрица коэффициентов линейных уравнений связи:

$$\begin{cases} Y_1 = b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + \cdots + b_{1n}X_n, \\ Y_2 = b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + \cdots + b_{2n}X_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_n = b_{n1}X_1 + b_{n2}X_2 + \cdots + b_{nn}X_n, \end{cases}$$

В результате преобразования получаем векторную переменную с некоррелированными компонентами $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Из условия ортогональности матрицы B следует, что

$$BB^T = B^T B = E \text{ и } B^{-1} = B^T,$$

поэтому

$$X = YB^T.$$

Ортогональное преобразование B должно обеспечить наибольшую изменчивость исследуемых объектов. Основным показателем изменчивости является дисперсия, в случае многомерных данных – ковариационная матрица. Определитель ковариационной матрицы K_X называется обобщенной дисперсией матрицы данных X.

Если ковариационная матрица данных X по определению равна:

$$K_X = M\{(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T\},$$

то ковариационная матрица главных компонент K_Y определяется выражением:

$$K_Y = M\{(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T\} = M\{B(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T B^T\} = BM\{(X - XX-XTBT=BKXBT.$$

Так как K_X и B являются квадратными матрицами, то определитель $|K_Y|$ ковариационной матрицы K_Y равен:

$$|K_Y| = |BK_XB^T| = |BB^T||K_Y| = |K_X|.$$

Следовательно, обобщенной дисперсией матрицы главных компонент Y является определитель матрицы $|BK_XB^T|$.

Тогда поиск главных компонент Y сводится к нахождению такого ортогонального преобразования B, при котором достигается максимум определителя матрицы BK_XB^T и выполняется ограничение BK_XB^T.

Максимизируем BK_XB^T при $B^TB = 1$, используя метод множителей Лагранжа:

$$L = B^T K_X B - \lambda(B\text{^}T\,B - 1) \to max,$$

где λ - множители Лагранжа.

Задача оптимизации в постановке сводится к максимизации определителя произведения трех матриц. Из линейной алгебры известно, что определитель произведения нескольких квадратных матриц равен произведению определителей этих же матриц, а определители матрицы и ее транспонированной матрицы равны между собой. Тогда коэффициенты матрицы B, доставляющие экстремум функции Лагранжа определяются из соотношений:

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 2K_X B - 2\lambda B = 0,$$

откуда $K_X B - \lambda B = 0$ *или* $(K_X - \lambda EB=0.$

Поскольку нас интересуют только решения, при которых $B \neq 0$, то должно удовлетворяться условие на определитель:

$$|K_X - \lambda E| = 0.$$

Остановимся на теореме, которая применяется в методе главных компонент.

Теорема. Для любой симметричной матрицы A существует ортогональная матрица C, такая что

$$C^T A C = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где λ_r - собственные значения (числа) матрицы А, а С является такой ортогональной матрицей, в которой r -й столбец является r-м собственным вектором, соответствующим r-му собственному числу λ_r.

Собственным вектором матрицы А называется такой ненулевой вектор, что для некоторого числа λ выполняется уравнение:

$$Ac = \lambda c.$$

Запишем теперь это уравнение в другом виде:

$$(A - \lambda E)C = 0.$$

Это уравнение является однородным и имеет ненулевой решение только тогда, когда определитель матрицы $(A - \lambda E)$ равен нулю, или в развернутом виде:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Данное выражение называется характеристическим уравнением. Если корни этого уравнения λ_r все различны, то каждому из них соответствует характеристический вектор c_r, определяемый с точностью до произвольного множителя, с помощью системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + (a_{12} - \lambda)c_2 + \dots + a_{1n}c_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + (a_{1n} - \lambda)c_n = 0 \end{cases}$$

Собственные числа вещественной симметричной матрицы вещественны. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам вещественной симметричной матрицы, ортогональны.

Тогда математический метод нахождения главных компонент заключается в вычислении собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и собственных векторов $B_1, B_2, \dots, B_n$ ковариационной матрицы K_X. Векторы, задающие направления главных осей – это собственные векторы ковариационной матрицы K_X, которые находятся из решения системы уравнений.

Векторы $B_1, B_2, \dots, B_n$ образуют ортогональную матрицу В соответствующих собственных векторов.

Несмотря на то, что вместо *n* признаков получено такое же количество главных компонент, вклад большей части главных компонент в объясняющую дисперсию оказывается небольшим. Если в пространстве главных компонент *Y* ограничиться *k* первыми главными компонентами, вклад которых наиболее весом в части объяснения суммарной дисперсии, а остальные *n-k* компонент положить равными нулю, то получим сжатую матрицу векторной переменной $\widehat{Y}$ с *k* главными компонентами.

Так в результате анализа были вычислены собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ковариационной матрицы. Собственные значения первых 9 главных компонент.

На рисунке 1 представлен график критерия Кэттелла («каменистая осыпь»), позволяющий установить количество главных компонент (укрупненных признаков) для последующего анализа. На графике по оси абсцисс откладывается порядковый номер *k* главных компонент, а по оси ординат – собственные числа векторов ковариационной матрицы показателей в порядке убывания их величин. Выделение компонент заканчивается на той компоненте, после которой исследуемая зависимость близка к горизонтальной и похожа на «каменистую осыпь». В нашем случае, на приведенном графике мы видим, что целесообразно сократить число главных компонент до 6-7.

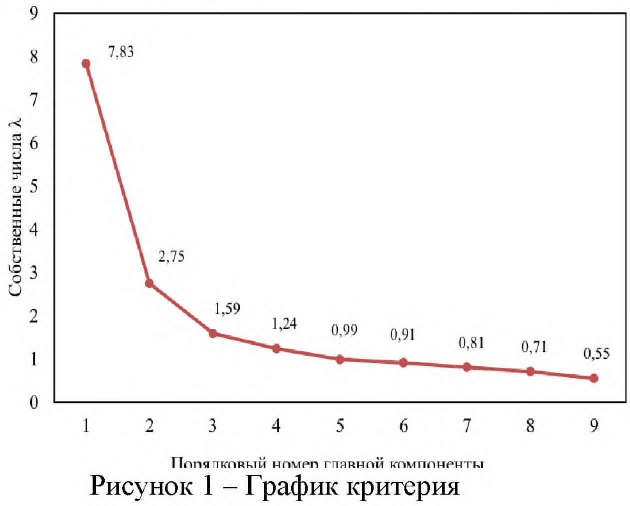

Рисунок 1 – График критерия «каменистой осыпи» Кэттела

График критерия отражает изменение относительной доли суммарной дисперсии, вносимой первыми главными компонентами. Так как собственные числа $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n \geq 0$ являются дисперсиями главных компонент, тогда первая главная компонента с наибольшим собственным значением λ_1 объясняет долю первой главной компоненты $I_1 =$

$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$ в дисперсии общей совокупности, сумма $\lambda_1 + \lambda_2$, т.е. $I_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$ совокупную долю двух первых главных компонент и т.д. Таким образом, мы видим, что можно ограничиться только первыми шестью главными компонентами, отражающими совместно более 90 % общей суммарной дисперсии. Остальные главные компоненты, которые суммарно отражают не более 10 %, можно опустить.

На рисунке 2 показаны факторные нагрузки всех 21 первичного показателя. Рисунок хорошо иллюстрирует как первичные показатели хорошо могут быть описаны 6-7 укрупненными показателями (главными компонентами).

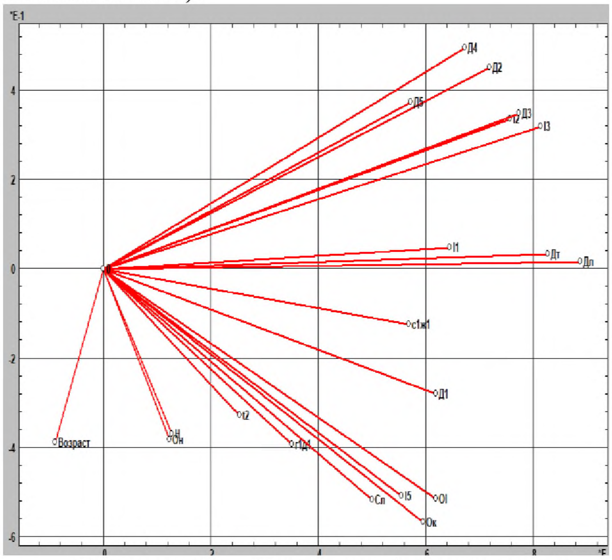

Рисунок 2 – Проекция факторных нагрузок

Первая главная компонента сильно взаимосвязана с такими показателями, как: Дт – тыльная сторона ладони и Дл – ладонная (флексорная) сторона ладони. Перечисленные показатели антропометрических данных связаны с первой главной компонентой положительной корреляционной связью. Поэтому первую главную компоненту Y1 будем интерпретировать как «ладонно-тыльная длина кисти».

Вторая главная компонента сильно взаимосвязана с такими показателями, как: л2 – ладонная длина второго пальца, л3 – ладонная длинна третьего пальца, л4 – ладонная длинна четвертого пальца, л5 – ладонная длина пятого пальца, Д2 – тыльная длина второго пальца, Д3 – тыльная длина третьего пальца. Д4 – тыльная длинна четвертого пальца и Д5 – тыльная длинна пятого пальца. Перечисленные показатели антропометрических данных связаны со второй главной компонентой положительной корреляционной связью. Поэтому вторую главную компоненту Y2 будем интерпретировать как «ладонно-тыльная длина пальцев».

Третья главная компонента сильно взаимосвязана с такими показателями, как: л1 – ладонная длинна первого пальца, Д1 – тыльная длинна первого пальца, с1ж1 – длина второй дуги тенара, Ол – обхват первого пальца. Перечисленные показатели антропометрических данных связаны с третьей главной компонентой положительной корреляционной связью. Поэтому третью главную компоненту Y3 будем интерпретировать как «фигура первого пальца».

Четвертая главная компонента сильно взаимосвязана с такими показателями, как: Ок – обхват кисти и Сл – толщина лучезапястного сустава. Перечисленные показатели антропометрических данных связаны с четвертой главной компонентой положительной корреляционной связью. Поэтому четвертую главную компоненту Y4 будем интерпретировать как «талия кисти».

Пятая главная компонента сильно взаимосвязана с такими показателями, как: t2 – толщина пальцев на уровне межпальцевых точек и г1д1 – длинна первой дуги тенара. Перечисленные показатели антропометрических данных связаны с пятой главной компонентой положительной корреляционной связью. Поэтому пятую главную компоненту Y5 будем интерпретировать как «толщина мягкотканых структур».

Шестая главная компонента сильно взаимосвязана с такими показателями, как: Н – расстояние от лучезапястного сустава, до основания тенара и Он – обхват первого пальца. Перечисленные показатели антропометрических данных связаны с шестой главной компонентой положительной корреляционной связью. Поэтому шестую главную компоненту Y6 будем интерпретировать как «обхват лучезапястного сустава». Кроме этого, связь между показателями шестой главной компоненты является латентной, так как изначально не находилось никаких предпосылок к их связи, ведь не подразумевалось, что обхват первого пальца, будет связан с расстоянием от лучезапястного сустава до основания тенара.

Эти показатели необходимо будет проверить путем повторения обмеров среди респондентов той же возрастной группы, чтобы убедится в наличие связи или в ее отсутствии. Сейчас же пока невозможно достоверно утверждать о наличии последней, так как имеет место случайность или ошибка в расчетах.

Использование метода главных компонент позволило перейти к укрупненным показателям, число которых значительно меньше числа первоначально взятых признаков. Главные компоненты адекватно отражают исходную информацию и содержат больше информации, чем непосредственно наблюдаемые признаки.

Полученные в процессе анализа новые укрупненные показатели являются важным теоретическим материалом для последующих статистических исследований, а проведенное исследование показало, что методика проектирования протеза кисти человека может быть существенно упрощена и ускорена за счет сокращения количества измеряемых показателей. Кроме того, значительно сокращается и количество технологических операций, требуемых для изготовления протеза, что, несомненно, дает существенный технологический и экономический эффекты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидченко Е.А. Разработка бионического протеза предплечья человека. // Сборник трудов молодых ученых АнГТУ. Ангарск, 2018. – с. 56– 63;
2. Демидченко Е.А., Истомин А.Л. Анализ антропометрических данных кисти руки человека для задачи проектирования протеза. // Сборник научных трудов АнГТУ. Ангарск, 2019. – с. 3 – 11;
3. Кулаичев А.П. Методы и средства комплексного анализа данных. - М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2006. – 512 с.

УДК 65.018:378

Колмогоров Алексей Геннадьевич,
к.т.н., доцент, зав. кафедрой «Автоматизация технологических процессов и производств», ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», e-mail: atp@angtu.ru
Тетерин Игорь Юрьевич,
студент кафедры «Автоматизация технологических процессов и производств», ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», e-mail: teterin.igor2017@ya.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНЕРЦИОННОСТИ КОНТАКТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ЛАБОРАТОРНОМ СТЕНДЕ

Kolmogorov A.G., Teterin I.IU.

EXPERIMENTAL STUDY OF INERTIA OF CONTACT TEMPERATURE CONVERTERS ON A LABORATORY STAND

Аннотация. *В статье приведены результаты экспериментального исследования основных датчиков температуры, применяемых на производстве, с точки зрения их инерционности. Рассматривается влияние типа номинальной статической характеристики, длины рабочей части, диаметра защитной арматуры, наличия защитного чехла, наличия защитного термокармана на показатель тепловой инерции.*

Ключевые слова: *датчик температуры, показатель тепловой инерции, экспериментальное исследование, номинальная статическая характеристика.*

Abstract. *The article presents the results of an experimental study of the main temperature sensors used in production, in terms of their inertia. Examines the impact of type nominal static characteristics, the length of the working part, diameters, availability of cover, availability of protective thermowell on the show-tel of thermal inertia.*

Keywords: *temperature sensor, thermal inertia indicator, experimental study, nominal static characteristic.*