УДК 519.1

Свердлова Ольга Леонидовна,
к.т.н., доцент кафедры физико-математических наук Ангарского государственного технического университета, тел. тел.8(3955)51-29-50, e-mail: olgasv273@mail.ru
Кондратьева Лариса Михайловна,
к.х.н., доцент кафедры физико-математических наук Ангарского государственного технического университета, тел. 8(3955)51-29-50, e-mail:kondrateva_lm@mail.ru
Добрынина Надежда Николаевна,
к.х.н., доцент кафедры физико-математических наук Ангарского государственного технического университета, тел. 8(3955)51-29-50, e-ail:nadya.dobrynina.75@mail.ru

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЕТЕЙ СТРУКТУРОЙ ОСТОВНОГО ДЕРЕВА

Sverdlova O.L., Kondratyeva L.M., Dobrynina N.N.

REPRESENTATION BY STRUCTURE OF SPANNING TREE

Аннотация. *Сетеобразные конструкции описывают множество технологических и интеллектуальных систем. В связи с этим существует необходимость исследовать механизмы, определяющие топологию сложных сетей, изучением которых занимается теория графов. Возникает проблема выбора способа задания графа или мультиграфа. В статье показано, что самое эффективное представление класса обыкновенных графов (в смысле информационной емкости) – представление структурой деревьев. Рассмотрены различные способы задания графов. Приведена теорема о возможности представления сетей структурой дерева, в доказательстве которой сформулированы необходимые и достаточные условия соответствия их представлениям. Рассмотрены вопросы преобразования одного представления в другое. Приведен пример кодирования сети. Показано, что сеть можно задать любым представлением деревьев, если это представление задает дерево с точностью до нумерации всех его вершин.*

Ключевые слова: *граф, мультиграф, сети, остовное дерево, ребра, вершины, система натуральных чисел.*

Abstract. *The most effective representation of the class of ordinary graphs (in the sense of information capacity) is representation of the structure of the trees. The paper considers the different ways of the graphs assignments. The theorem on the possibility of networks representation by a tree structure is given. In proving this theorem the necessary and sufficient conditions compliance with their representation is formulated. The issues of representations transformation are considered. An example of network coding is given. The network can be set by any tree representation if this representation sets a tree accurate within the numbering of all its vertices.*

Keywords: *graph, multigraph, networks, tree graph, links, apexes(apices), system of natural numbers.*

Введение

Сложные сетеобразные конструкции описывают широкое множество систем технологической и интеллектуальной важности. Например, клетку лучше всего описывает сложная сеть химических элементов, соединенных химическими реакциями [1, 2]; привычки и мнения распространяются по общественной сети, вершинами которой являются отдельные люди, а ребрами – различные социальные отношения; всемирная паутина – это огромная виртуальная сеть веб-страниц, соединенных гиперссылками. Эти системы представляют малую часть примеров, которые свидетельствуют о необходимости исследовать механизмы, определяющие топологию сложных сетей [3]. Исторически изучением сложных сетей занимается теория графов.

При решении различных задач теории графов почти всегда возникает проблема выбора способа задания графа или мультиграфа с точностью до изоморфизма. В некоторых случаях граф удобно задавать в виде матрицы смежности или матрицы инциденции [4]. В каждом конкретном случае выбор представления не всегда является тривиальной задачей. Проблема выбора представления графа весьма актуальна, так как к требованию простоты алгоритмов добавляются требования к экономии памяти, а так же возможность проверки входной информации о графе. Представляют так же интерес вопросы преобразования одного представления в другое [5].

Из всех представлений сетей самое эффективное представление (в смысле информационной емкости) – представление структурой остовного дерева. Так, 0,1-кодирование требует всего два бит информации на одно ребро [6]. В связи с этим интересно исследовать сети с точки зрения их представления деревьями. Данная статья посвящена рассмотрению именно этой проблемы. В работе сформулированы необходимые и достаточные условия соответствия сетей их представлениям.

Пусть задан мультиграф $L=(X,U)$ с множеством вершин $X=\{x_1,x_2,....,x_n\}$ и множеством ребер $U=\{u_1,u_2,....,u_n\}$. Поставим в соответствие заданному мультиграфу $L=(X,U)$ сеть $R(L)$ с единственным истоком, множеством вершин X множеством дуг $\vec{U}$. Сеть $R(L)$ получается из графа L ориентацией ребер графа L так, что бы в полученном подграфе не было контуров и существовала единственная вершина b с полустепенью исхода $\sigma^-(b)=\sigma(b)$ (где $\sigma(b)$ – максимальная степень вершины в L). Рассмотрим множество вершин $X'\subset X$ сети $R(L)$ таких, что для любой вершины $x\in X'$ полустепень захода – $\sigma^+(x)>1$. Для каждой вершины из x' отсоединим $\sigma^+(x)-1$ ребер и добавим на свободные концы $\sigma^+(x)-1$ вершин $\{b_x^1,b_x^2,....,b^{\sigma(x)-1}\}$ [7].

Полученный граф $T(R)$ будет деревом с корнем в b. Перенумеруем вершины дерева $T(R)$, выбирая в качестве начальной вершины корень b, получим дерево $T'(R)$ и построим систему натуральных чисел:

$$R(T'(R))=\{a_i\},\quad i=1,2,...,m+1.$$

Расположим корневое дерево T_b на плоскости и будем осуществлять обход его ребер, нумеруя вершины в порядке их прохождения по дереву T_b. Тогда $a_i=\sigma(x_i)-1$, где $x_i\in T_b'$.

Если для некоторого i, $a_i=0$, то либо соответствующая вершина в L является висячей и тогда рассматриваем другие числа $\{a_i\}$, либо она получена подразбиением некоторой вершины $x\in R(L)$. Следовательно, в $T'(R)$ найдется вершина y_j с минимальным номером j из множества номеров вершин подразбиения вершины x. Положим $a_i=j+\sigma(L)$, (где $\sigma(L)$ - максимальная степень вершины в L). Проделывая аналогичную процедуру для всех $a_i=0$, получим последовательность из натуральных чисел $P(T'(R))=\{a_i\}$ [8].

Теорема. Система натуральных чисел $P(T'(R))=\{a_i\}$, $i=1,2,.....,m+1$ и число $\sigma(L)$ определяет сеть $R(L)$ с множеством ребер $\{u_1,u_2,....,u_m\}$ и множеством вершин $\{x_1,x_2,....,x_m\}$ с точностью до изоморфизма тогда, когда

$$\forall a_i\le\sigma(L)\qquad \sum_{i=1}^{k}a_i=m \tag{1}$$

$$\forall a_i\le\sigma(L)\qquad \sum_{i=1}^{k}a_i\ge k,\qquad k=1,2,...,m \tag{2}$$

Если множество I_1 – множество индексов $a_i\le\sigma(L)$, а I_2 – множество индексов $a_i>\sigma(L)$, то

$$\forall a_i(j\in I_2),\qquad a_j-\sigma(L)\in I_1. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость следует из построения $P'(T'(R))$.

Достаточность. Пусть последовательность $P(T'(R))=\{a_i\}$ удовлетворяет условию теоремы. Покажем, что ей соответствует единственное дерево $T'(R)$. Если дерево $T'(R)$ имеет две вершины, то, очевидно, $a_1=1,\ a_2=0,$ и $T'(R)$ является ребром с инцидентными вершинами $x_1,\ x_2$.

Пусть дерево восстановлено до k вершин и $i\le k$ вершин получили номера.

Тогда возможны два случая:

1) $a_i\ne 0,$ тогда к вершине x_i приписываем a_i ребер и одной из полученных вершин приписываем номер x_{i+1}.

2) $a_i=0,$ тогда возвращаемся с вершины x_i к вершине x_1 по цепи $\overline{x_ix_1}$ до тех пор, пока не встретится ребро, у которого одна концевая вершина не имеет номера, такое ребро всегда найдется в силу условия (2). Этой вершине присвоим номер x_{i+1}. Условие (1) гарантирует, что все вершины полученного дерева $T'(R)$ будут перенумерованы. Та-

ким образом, дерево $T'(R)$ однозначно восстанавливается.

Покажем, что условие (3) позволяет определить, какие висячие вершины $T'(R)$ и куда нужно приклеить, что бы получить сеть $R(L)$.

В силу $a_j - \sigma(L) \in I$, j–ую висячую вершину следует приклеить к $a_j - \sigma(L)$ вершине дерева $T'(R)$. Теорема доказана.

В качестве заключения приведем пример кодирования сети $R(L)$ системой $R(T'(R))$.

Рассмотрим сеть $R(L)$ (рис.1).

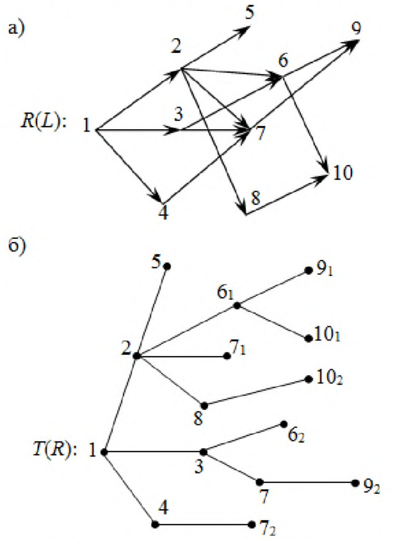

Рис.1 а) Сеть $R(L)$, б) дерево $T(R)$.

Дерево, соответствующее сети $R(L)$, показано на рис. 1б.

Перенумеруем вершины дерева $T(R)$ вышеуказанным способом. Получим подстановку

$П = (1,4,7_2,3,7,9_2,6_2,2,8,10_2,7_1,6_1,10_1,9_1,5)$ и дерево $T'(R)$ с новой нумерацией вершин.

Система $P(T'(R))$ в этом случае запишется следующим образом:

$$P(T'(R)) = (3,1,0,2,1,0,0,4,1,0,0,10,0,0).$$

В системе все нули кроме последнего, соответствуют расщепленным вершинам. Рассмотрим элемент $i_3 = 0$, из подстановки $П$ видно, что его необходимо склеить с вершиной 7 дерева $T(R)$, или если учитывать подстановку $П$, с 5-ой вершиной дерева $T'(R)$. Следовательно, положим $a_3 = 5 + \sigma(L)$, так как $\sigma(L) = 5$, то $a_3 = 10$. Проделывая аналогичную процедуру для всех нулевых элементов $P(T'(R))$, кроме последнего, получим:

$$P(T'(R)) = (3,1,1,0,2,1,1,9,17,4,1,18,10,2,18,19,0)$$

Сеть $R(L)$, вообще говоря, можно задать любым представлением структурой дерева, если это представление задает дерево с точностью до нумерации всех его вершин [9].

В этом случае, имея информацию о склейке вершин дерева, можно восстановить сеть $R(L)$, а следовательно, и произвольный мультиграф $L = (X, U)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евсевлеева Л.Г., Кузьмин О.В. Комбинаторная теория графов и молекулярные структуры / Л.Г. Евсевлеева, О.В. Кузьмин // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. –№6, Т.16. – С. 871 – 873.

2. Евсевлеева Л.Г., Быкова Л.М., Кирик М.С. Метод графов в теории реакции вытеснения с ионометрическим детектированием / Л.Г. Евсевлеева, Л.М. Быкова, М.С. Кирик // ММТТ–22: сб. трудов XXII МНТК. – 2009. – Т.9. – С. 161-163.

3. Берж К. Теория графов и ее применение / К.Берж – М.: Иностранная литература, 1962.

4. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари – М.:Мир, 1973.

5. Яцимирский К.Б. Применение метода графов в химии / К.Б. Яцимирский – Киев: Наукова думка, 1971.

6. Дистель Р. Теория графов / Р. Дистель – Ин-т математики, 2002.

7. Евсевлеева Л.Г. Быкова Л.М, Сизенков А.С. Матричное представление графов в транспортных задачах / Л.Г. Евсевлеева, Л.М. Быкова, А.С. Сизенков // Вестник АГТА. – 2014.– №8. – С. 160–162.

8. Евсевлеева Л.Г., Добрынина Н.Н., Быкова Л.М. Метод графов в моделировании мембранных процессов / Л.Г. Евсевлеева, Н.Н. Добрынина, Л.М. Быкова // Вестник АГТА. – 2007. –№1.Т1. – С.32–36.

9. Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А., Малинецкий Г.Г. Некоторые аспекты динамической теории графов. / А.А. Кочкаров, Р.А. Кочкаров, Г.Г. Малинецкий // Вычислительная математика и математическая физика. – 2015. – №9. Т.55. – С. 1623– 1629.