УДК 517.18

Свердлова Ольга Леонидовна,
к.т.н., доцент, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: olgasv273@mail.ru
Кондратьева Лариса Михайловна,
к.х.н., доцент, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: kondrateva_lm@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Sverdlova O.L., Kondratyeva L.M.

ON SOME APPLICATIONS OF HYPERBOLIC FUNCTIONS

Аннотация. В работе рассматриваются гиперболические функции, история их возникновения, современное определение, свойства и графики. Приводятся примеры практического применения гиперболических функций.

Ключевые слова: гиперболические функции, графики гиперболических функций, дифференциальные уравнения.

Abstract. The paper deals with hyperbolic functions, the history of their origin, modern definition, properties and graphs. Examples of practical application of hyperbolic functions are given.

Keywords: hyperbolic functions, graphs of hyperbolic functions, differential equations.

Гиперболические функции, особенно гиперболический косинус (цепная линия), встречаются во многих приложениях математического анализа. Изучение фактической формы подвешенных проводов, тросов в сопоставлении с теоретической цепной линией позволяет оценить реальное состоянии объекта и возможные изменения этого состояния под действием нагрузок. Например, влияние ветровых нагрузок на линии электропередач (ЛЭП). Поэтому интерес к гиперболическим функциям не ослабевает и у современных ученых.

Первое упоминание о гиперболических функциях обнаружено в трудах английского математика Абрахама де Муавра(1667-1754). Пробуждение осознанного интереса к гиперболическим функциям связано с решением задачи об определении формы цепной линии, которую поставил в 1690 году Я. Бернулли. Однако современное определение гиперболических функций было дано итальянским математиком Винченцо Риккати в 1757 году [1].

Гиперболические функции рассматриваются как комбинации показательных функций: 1) гиперболический синус $sh\,x=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$; 2) гиперболический косинус $ch\,x=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$; 3) гиперболический тангенс $th\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 4) гиперболический котангенс $cth\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Графики гиперболического синуса и гиперболического косинуса строят соответственно как разность и сумму двух графиков $y_1=\frac{1}{2}e^x$ и $y_2=\frac{1}{2}e^{-x}$. Построение графика гиперболического тангенса сводится к перемножению известного графика функции $y_1 = sh\,x$ и графика функции $y_2 = \dfrac{1}{ch\,x}$, который надо построить.

Свойства гиперболических функций аналогичны свойствам тригонометрических функций. Например,

$(ch\,x)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)$, $(sh\,x)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)$, тогда $ch^2 x - sh^2 x = 1$. (1)

Интегралы от рациональных функций и функций, содержащих иррациональные выражения, довольно просто вычисляются с помощью замены переменной с использованием гиперболических функций.

Решение дифференциальных уравнений вида $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ значительно упрощается с помощью подстановки

$$p + \sqrt{p^2 + 1} = e^u, \qquad (2)$$

где $e^u = shu + chu,\ p = shu$ и $ch^2 x - sh^2 x = 1$. Если в процессе решения положить $\sqrt{p^2 + 1} + p = e^{x+C}$, то искомую функцию можно найти из уравнения

$$p = sh(x + C). \qquad (3)$$

В качестве примера предложено решение задачи о цепной линии, где требуется найти положение равновесия гибкой нерастяжимой линии, укрепленной концами между двумя точками.

Техническое решение задачи приводит к уравнению вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{h}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad (4)$$

где q – удельная нагрузка, приходящаяся на единицу длины; h – горизонтальная составляющая касательной $(h - const)$. Данное уравнение не содержит переменную x и функцию $y(x)$. Решая данное уравнение с помощью подстановки $y' = p(x), y'' = p'(x)$, получим $\ln\left|p + \sqrt{p^2 + 1}\right| = \frac{q}{h}x + C_1 \Rightarrow p + \sqrt{p^2 + 1} = e^{\frac{q}{h}x + C_1}$

или $p = sh\left(\frac{q}{h}x + C_1\right)$. Интегрируя последнее уравнение, найдем общее решение уравнения (4) $y = \frac{h}{q}ch\left(\frac{q}{h}x + C_1\right) + C_2$, которое описывает семейство цепных линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бодряков В.Ю., Быков А.А. Демиденко И.Д. История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения [Электронный ресурс] // Общероссийский математический портал: [сайт]. [2018]. URL: http: // www. mathnet.ru/ rus/agreement.