УДК 617.57-77

Демидченко Егор Александрович,
магистрант кафедры «Промышленная электроника и наноэлектроника», ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», e-mail: demidchenko.ea@yandex.ru
Пудалов Алексей Дмитриевич,
к.т.н., доцент кафедры «Промышленная электроника и наноэлектроника», ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», e-mail: puddim@yandex.ru ru

ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ В ИССЛЕДОВАНИИ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ

Demidchenko E.A., Poudalov A.D.

POSSIBILITIES OF USING FRACTAL DIMENSION IN STUDYING COMPLEX

Аннотация. *Рассмотрена фрактальная размерность на нескольких примерах, показан способ её вычисления. Предложены возможности применения фракталов в исследованиях сложных сигналов.*

Ключевые слова: *фрактал, размерность.*

Abstract. *The fractal dimension is considered on several examples; the method of its calculation is shown. The possibilities of using fractals in the study of complex signals are proposed.*

Keywords: *fractal, dimension.*

Фрактальной размерностью называется способ определения размерности множества в метрическом пространстве Rn. Она характеризует то, как объект заполняет пространство и описывает его структуру при изменении коэффициента увеличения или при изменении масштаба самого объекта [1].

Чтобы целиком закрыть множество F, например n-мерными кругами диаметра ε, потребуется определённое количество элементов размера ε–N(ε), заполняющих его.

В статье предлагается на простых примерах рассмотреть вычисление фрактальной размерности D и оценить, как будут меняться результаты в зависимости от сложности формы изучаемого объекта.

Для того, чтобы задать фрактальную размерность, необходимо взять некую двумерную структуру и разделить её стороны на равные между собой части. Результатом деления будет являться определённое количество новых частей.

На следующем этапе нужно будет разделить уже полученные на предыдущем шаге части и т.д. Для того, чтобы понять зависимость количества N(ε) на каждой итерации, составлена таблица 1 и для наглядности предлагается взять одномерное ограниченное множество – прямую линию.

На первом шаге получается два отрезка длины 1/2, на втором четыре отрезка длиной 1/8, далее 8 отрезков длиной 1/16 и т.д. Получается, что каждый новый уровень будет состоять из M^D частей предыдущего уровня, а количество полученных частей будет равняться $N=M^D$.

Таблица 1 – Зависимость количества N(ε) на каждой итерации

Номер итерации	ε	N(ε)
0	1	1
1	1/2	2
2	1/4	4
3	1/8	8
…	…	…
n	$1/2^n$	2^n

Для получения формулы фрактальной размерности D следует выполнить преобразование, которое имеет следующий вид:

$$N=M^D=>logM^D=>D=\frac{\log N}{\log M},$$

где M – число частей, на которое делится сторона; N – это число частей получаемых в результате деления стороны на каждом шаге итерации.

По расчётам формулы 1 следует, что фрактальная размерность для прямой линии будет равняться 1, т.к. M = 2 и N = 2, и из каждой части получается два новых отрезка. Если разделить линию не на две, а на три части, то всё равно D будет равно 1, т.к. M и N будут равны трём.

Теперь для примера возьмём не отрезок, а квадрат, изображённый на рисунке 1.

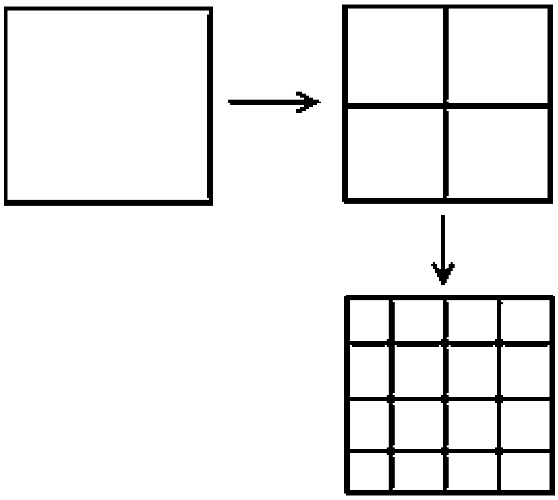

Рисунок 1 – Деление сторон квадрата на две равные между собой части

Если делить его на две равные части, то уже в результате деления получится 4 новые части на каждом шаге итерации. Таким образом, M = 2 и N = 4. Подставляя величины M и N в формулу 1, получим:

$$D=\frac{log\,2^2}{log\,2}=\frac{2\,log\,2}{log\,2}=2$$

Результат вычисления для квадрата, схож с результатом, полученным при вычислении D для прямой линии. Это потому, что и квадрат, и линия являются хорошими множествами, т.е. не имеют каких-либо особенностей формы.

Если вместо хорошего множества взять фрактал, такой как звезда Коха [4], изображённый на рисунке 2, то при делении его, например, на три части, получится четыре новых, так как каждая часть будет разделена на четыре части равные 1/4 от исходного объекта.

Используя формулу 1, вычислим фрактальную размерность для фрактала – звезда Коха:

$$D=\frac{log\,2^2}{log\,3}=\frac{2\,log\,2}{log\,3}\approx 1{,}26$$

Видно, что чем сложнее форма изучаемого объекта F, тем чувствительнее становится фрактальная размерность. Чтобы подтвердить эту закономерность посчитаем D для еще одного фрактала – треугольника Серпинского, который изображён на рисунке 3.

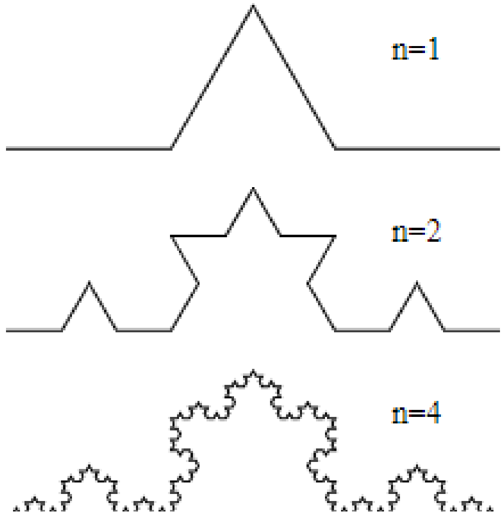

Рисунок 2 – Звезда Коха, изменяющаяся итерационно

Рисунок 3 – Треугольник Серпинского

В этом случае, поделив каждую сторону треугольника на две части, на каждой итерации, в результате такого деления, получится три новые части. Величина D для треугольника Серпинского, вычисленная по формуле 1, равна:

$$D=\frac{log\,3}{log\,2}\approx 1{,}58.$$

Из полученных результатов выходит, что фрактальная размерность чувствительна, к объектам с несовершенной или сложной формой, позволяя различать и индивидуализировать свойства объектов, которые раньше не были видны. Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что фрактальная размерность – это величина плотности самоподобия объекта F.

Для описания реальных структур, являющихся более сложными структурами, следует использовать один из видов задания фрактальной размерности – размерность Минковского, имеющая следующий вид:

$$Dm=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{log\,N(\varepsilon)}{log\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{logN(\varepsilon)}{-\,log\,\varepsilon}.$$

Для примера, снова возьмём фрактал – звезду Коха и вычислим Dm для него.

Используя формулу 2, подставим в неё те же самые значения и получим Dm=1,24. Кроме этого рассмотрев Dm, как неизвестное, получим, что приведённое выражение является формулой прямой линии. Это значит, что, запустив цикл по различным параметрам, можно получить график с линией регрессии [6], изображённой на рисунке 4.

Таким образом, для множества данных, это значение будет являться аппроксимацией фрактальной размерности Минковского.

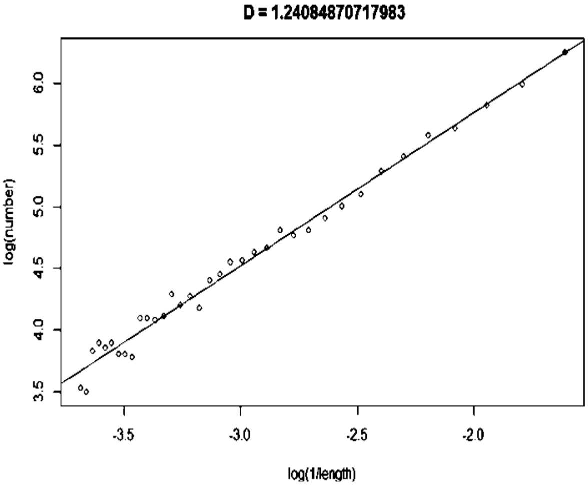

Рисунок 4 – Линия регрессии для звезды Коха

Таким образом, фрактальная размерность является локальной характеристикой объекта и по сути является численной возможностью описать сложность изучаемого объекта или сигнала.

Кроме этого, фрактальная кривая обладает свойством самоподобия, поэтому может быть рассмотрена в уменьшенном масштабе. Если это справедливо для электромиограммы (ЭМГ), то при использовании метода фрактальных размерностей, разделяя временную последовательность на небольшие участки, каждый из которых в некоторой степени подобен всей кривой, можно разбивать их на дискретные интервалы, к которым присваивать правила определяющие дальнейшие действия.

Таким образом, с помощью метода фрактальной размерности предполагается исследовать сигнал ЭМГ, чтобы обнаружить его новые свойства, которые можно будет использовать для решения в задаче идентификации пальцев кисти руки. Также, имея достаточную выборку данных и проведя её статистический анализ, для формирования вектора признаков, используя метод фрактальной размерности, можно будет оценить сложность ЭМГ, открывая новые возможности в области протезирования конечностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gabriele A. Fractals in biology and medicine / A. Gabriele, Theo F. Nonnenmacher. – Springer, 2005;

2. VicsekTamás. Fluctuations and scaling in biology / VicsekTamás. – Oxford : Oxford University Press, 2001;

3. Википедия [Электронный ресурс] // Размерность Хаусдорфа: [сайт]. [2004]. URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/Размерность_Хаусдорфа (дата обращения: 16.09.2021);

4. Википедия [Электронный ресурс] // Кривая Коха: [сайт]. [2004]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_Коха (дата обращения: 16.09.2021);

5. Википедия [Электронный ресурс] // Треугольник Серпинского: [сайт]. [2004]. URL: https:// ru.wikipedia.org/ wiki/ Треугольник_Серпинского (дата обращения: 16.09.2021);

6. Википедия [Электронный ресурс] // Линия регрессии: [сайт]. [2004]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Linear_regression (дата обращения: 16.09.2021).