СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Антонов, Д. В.** Основные принципы развития транспортных систем городов / Д.В. Антонов, О.А.Лебедева // Вестник Ангарской государственной технической академии. 2014. № 8. С. 149-155.

2. **Лебедева, О. А.** Моделирование грузовых матриц корреспонденций гравитационным и энтропийным методами / О. А. Лебедева, Д. В. Антонов // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2015. № 5 (100). С. 118-122.

3. **Гозбенко, В. Е.** Совершенствование транспортно-экспедиционного обслуживания грузовладельцев / В. Е. Гозбенко, М. Н. Крипак, А. Н. Иванков // Иркутск,2011.

4. **Колесник, М. Н.** Алгоритм автоматизированного выбора подвижного состава / М. Н. Колесник, В. Е. Гозбенко // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 4 (16). С. 45-47.

5. **Полтавская, Ю. О.** Методы сбора данных о продолжительности движения на маршруте и требования к объему выборки / Ю.О. Полтавская // Вестник Ангарского государственного технического университета. 2018. № 12. С. 192-195.

6. **Wilson, A. G.** A statistical theory of spatial distribution models / A. G. Wilson // Transportation Research, 1B: (1967), 253-269.

УДК 656.02

Лебедева Ольга Анатольевна,
к.т.н., доцент кафедры «Управление на автомобильном транспорте», ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», тел.: +7(952)6326611, e-mail: kravhome@mail.ru

Савватеева Екатерина Юрьевна,
студент кафедры «Управление на автомобильном транспорте», ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», тел.:+7(952)6336370, e-mail: savvateeva.ket@gmail.com

СВЯЗЬ МАКСИМИЗАЦИИ ЭНТРОПИИ И КОНЦЕПЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОЛЕЗНОСТИ В ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЕ

Lebedeva O.A., Savvateeva E.Yu.

RELATIONSHIP OF ENTROPY MAXIMIZATION AND THE CONCEPT OF ECONOMIC UTILITY MODEL IN THE TRANSPORT SYSTEM

Аннотация. *Целью исследования является изучение взаимосвязи между методами максимальной энтропии и концепции экономической полезности при распределении поездок в транспортной системе.*

Ключевые слова: *энтропия, методы максимизации, экономическая модель.*

Abstract. *The aim of the article is to study the relationship between maximum entropy methods and the concept of economic utility in the distribution of trips in a transport system.*

Keywords: *entropy, maximization methods, economic model.*

В последние годы все большую актуальность приобретает решение транспортных задач относительно моделирования в городской среде. Общий подход основан на концепции энтропия и принципах ее оценки [1-7]. Альтернативный вариант решения задачи лежит через концепцию экономической модели полезности (взаимосвязь между максимальной энтропией и максимальной производительностью). Целью исследования является изучение эквивалентности и взаимосвязи между этими двумя принципами в контексте распределения поездок.

Энтропийный подход распределения поездок (информационная энтропия)

Рассмотрим модель города с центральным деловым районом и набор производственных площадок $\{i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ и набор рабочих мест или секторов $\{j,\ j = 1, 2, ..., m\}$ в центральном районе [8-10].

Пусть T_{ij} – количество поездок, исходящих из i-го места расположения (пункт отправления) до j-го рабочего места (пункт назначения). Тогда энтропия распределения поездок задается:

$$S = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T_{ij} \cdot \ln T_{ij} \quad (1)$$

Предположим, что общее количество поездок, исходящих из объекта i, и общее число лиц, занятых на j-м рабочем месте:

$$\sum_{j=1}^{m} T_{ij} = A_i \,, (i = 1,2, \dots, n)$$
$$\sum_{i=1}^{n} T_{ij} = A_j \,, (j = 1,2, \dots, m) \qquad (2)$$

Общая стоимость перевозки фиксированная:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T_{ij} \cdot C(r_{ij}) = C \qquad (3)$$

где r_{ij}– расстояние j-го сектора в центральном районе города от i-го места расположения; $C(r_{ij})$ – функция затрат.

Ограничения (2) и (3) недостаточны для определения значения T_{ij}. Однако этот показатель возможно оценить по максимальной энтропии. В соответствии с этим принципом, наименее смещенным будет то распределение, которое максимизирует энтропию S, заданную (1), с учетом ограничений (2) и (3). Максимальная доходность является:

$$T_{ij} = a_i \cdot b_j \cdot e^{-\lambda \cdot C(r_{ij})} \qquad (4)$$

где параметры a_i , b_j и λ определяются уравнениями:

j=1*mai·bj·e*–*λ·Crij*=*Ai*
(*i*=1,2,…,*n*)*i*=1*nai·bj·e*–*λ·Crij*=*Bj*
(*j*=1,2,…,*m*), (5)

а также

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j \cdot C(r_{ij}) \cdot e^{-\lambda \cdot C(r_{ij})} = \hat{C} \qquad (6)$$

Выше распределение определялось как задача теории информации. Поскольку доступная информация (или ограничения) недостаточны для однозначного определения точного распределения, возможно использование принципа максимальной энтропии. Рассмотрим построение экономической модели поведения, связанной с выбором пути поездки. Разделяют поездки в зависимости от цели. Считается, что распределение поездок является результатом некоторых решений. Так как человек старается связывать место жительства с местом приложения труда по кратчайшему маршруту, насколько это возможно при ограничениях из доступных ресурсов.

Человек, рассматривающий различные потенциальные места жительства, ассоциирует рейтинг или индекс полезности. Пусть функция плотности вероятности полезности x для конкретного места i равна $f_i(x), x \geq a > 0$. Тогда вероятность того, что что-то в таком месте имеет полезность, равную u или больше, чем u, определяется как:

$$P(u) = \int_{u}^{\infty} f_i(x)\, dx \qquad (7)$$

Индекс полезности включает в себя размер арендной платы (стоимости жилья), доступности учебных и медицинских учреждений, наличие газификации, электричества, отопления, водоснабжения, торговых комплексов, за исключением расстояния от центрального района. Таким образом, чистая полезность равна полезности за вычетом транспортных расходов $(u - Kr_{ij})$, где r_{ij} – расстояние i-го сектора от j-го рабочего места в центральном районе города, а K– коэффициент преобразования расстояния в полезность.

Человек всегда пытается максимизировать чистую полезность. Поскольку финансовые возможности населения различны, то выбор может быть сделан в пользу жилья с удовлетворительным уровнем полезности s, так что:

$$(u - Kr_{ij}) \geq s$$

или

$$u \geq s + Kr_{ij} \qquad (8)$$

Если A_i – общее количество предложений жилья в i-м секторе на расстоянии r_{ij} от j-го рабочего места, то вероятность проживания человека на этом уровне равна:

$$A_i \cdot P(s + Kr_{ij}) \qquad (9)$$

Если общее количество лиц, занятых на j-м рабочем месте в центральном районе города, равно B_j, то:

$$T_{ij} \sim A_i \cdot B_j \cdot P(s + Kr_{ij}) \qquad (10)$$

Сравнивая (4) и (10), замечаем, что:

$$a_i \cdot b_j \cdot e^{-\lambda \cdot C(r_{ij})} \sim A_i \cdot B_j \cdot P(s + Kr_{ij})$$

или

$$C(r_{ij}) \sim \ln P(s + Kr_{ij}) + \ln(A_i \cdot B_j) -$$
ln*ai·bj* (11)

Таким образом, всегда можно найти такую стоимость, при которой максимизация энтропии и полезности становятся эквивалентными. Проиллюстрируем эквивалентность конкретными примерами, найдя соответствующие функции стоимости.

Сначала предположим, что распределение полезности является отрицательной экспонентой:

$$f_i(x) = e^{-ax}, x \geq 0 \qquad (12)$$

Тогда из (10):

$$T_{ij} \sim A_i \cdot B_j \int_{s+Kr_{ij}}^{\infty} e^{-ax} dx \sim \frac{A_i \cdot B_j e^{-a(s+Kr_{ij})}}{a}$$

Два метода приводят к одному и тому же типу распределения, если стоимость проезда $C(r_{ij})$ имеет вид:

$$C(r_{ij}) \sim s + Kr_{ij} \qquad (13)$$

Если $f_i(x) = \frac{e^{-x} \cdot x^{m-1}}{\Gamma(m)},\ x \geq 0$

(14)

Затем

$$T_{ij} \sim A_i \cdot B_j \int_{s+Kr_{ij}}^{\infty} \frac{e^{-x} \cdot x^{m-1}}{\Gamma(m)} dx \sim A_i \cdot B_j e^{-(s+Kr_{ij})}(A_1 + A_2 r_{ij} + \cdots + A_m r_{ij}^{m-1}),$$

что приводит к распределению мультиплексирования энтропии, если берется:

$$C(r_{ij}) \sim \left[(s + Kr_{ij}) - \ln \textstyle\sum_{\mu=1}^{m-1} A_\mu r^{\mu-1}\right]$$

(15)

Если:

$$f_i(x) = \frac{a^2}{x},\ x \geq a, \qquad (16)$$

то получаем обобщенную гравитационную модель:

$$T_{ij} \sim A_i \cdot B_j \int_{s+Kr_{ij}}^{\infty} \frac{a^2}{x} dx \sim \frac{A_i \cdot B_j a^2}{(s + Kr_{ij})^2}$$

Заметим, что, если взять функцию стоимости распределения максимальной энтропии это приведет к распределению полезности:

$$C(r_{ij}) \sim ln(s + Kr_{ij}) \qquad (17)$$

Распределение поездок: энтропийный подход (распределение Бозе-Эйнштейна и распределение Ферми-Дирака)

Рассмотрим вариант энтропии поездок на основе распределений Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака и исследуем роль функции полезности.

Пусть T_{ij} будет числом поездок из i-го сектора на j-е рабочее место, а имеющиеся ограничения или информация будут такими же, как (2) и (3).

Задача состоит в оценке T_{ij} на основе информации о стоимости и оценках (2) и (3). Применяем принцип максимальной энтропии с квантовой мерой энтропии.

$$\hat{S} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T_{ij} \ln T_{ij} + a \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (1 + aTij) \ln(1 + aTij) \qquad (18)$$

где a = +1 для энтропии Бозе-Эйнштейна;

a = –1 для энтропии Ферми-Дирака.

Максимизация энтропии распределения с учетом ограничений (2) и (3) приводит к:

$$T_{ij} = \frac{1}{a_i \cdot b_j \cdot e^{-\lambda \cdot C(r_{ij})} - a} \qquad (19)$$

Значение a = 1 в (19) соответствует распределению Ферми-Дирака (разрешено не более одного пункта поездки для одного пункта назначения). Значение a = –1 в (19) соответствует распределению поездок по Бозе-Эйнштейну (неограниченному количеству конечных точек для каждого пункта назначения).

Распределение поездок: утилитарный подход

Выше приведено, что:

$$T_{ij} \sim A_i \cdot B_j \cdot P(s + Kr_{ij}), \qquad (20)$$

а также

$$P(u) = \int_{u}^{\infty} f_i(x)\, dx$$

где $f_i(x)$ – некоторая функция полезности для i-го местоположения. Это может быть потенциальная функция j-го рабочего места или функция, которая зависит от полезности i-го происхождения (сектора-жилого помещения) и привлекательности i-го места работы. A_i и B_j – некоторые заданные значения, относящиеся к пункту отправления (месту проживания) и месту назначения j (место работы). Рассмотрим математическую запись (10) и (19):

$$A_i \cdot B_j \cdot P(s + Kr_{ij}) \sim \frac{1}{a_i \cdot b_j \cdot e^{\lambda \cdot C(r_{ij})} - a}$$

или же

$$a_i \cdot b_j \cdot e^{\lambda \cdot C(r_{ij})} \sim \frac{1}{A_i \cdot B_j \cdot P(s + Kr_{ij})} + a$$

или же

$$C(r_{ij}) \sim \ln\left[\frac{a}{a_i \cdot b_j} + \frac{1}{A_i \cdot a_i \cdot B_j \cdot b_j \cdot P(s + Kr_{ij})}\right] \qquad (21)$$

Таким образом, можно найти затраты, которые могут сделать максимизацию энтропии и полезность эквивалентными. Эквивалентность будет проиллюстрирована некоторыми конкретными примерами.

Рассмотрим функцию полезности:

$$f_i(x) = \frac{ae^2}{(e^x + a)^2},\ x > a \qquad (22)$$

Тогда:

$$T_{ij} \sim A_i \cdot B_j \int_{s+Kr_{ij}}^{\infty} \frac{ae^2}{(e^x + a)^2} dx \sim A_i \cdot$$

$$Bjaes + Krij + a == a\, Ai \cdot Bjes + Krij + a \qquad (23)$$

Заметим, что при a = +1, полученное таким образом распределение (23) напоминает квантовое распределение поездок с $C(r_{ij}) \sim s + Kr_{ij}$.

Распределение полезности следует отрицательной экспоненте, поскольку $f_i(x) = e^{-ax}, x \geq 0$. Получается, что T_{ij} имеет вид:

$$T_{ij} \sim \frac{A_i \cdot B_j e^{-a(s+Kr_{ij})}}{a} \qquad (24)$$

что приводит к квантовому распределению поездок, если:

$$C(r_{ij}) \sim \ln\left(e^{a(s+Kr_{ij})} \pm 1\right) \qquad (25)$$

В статье рассматриваются два подхода к задаче принятия решений в транспортной системе. Оба подхода основаны на понятиях энтропии полезности и математических подходах в случае распределения поездок. Статья носит теоретический характер, но не является чисто гипотетической, поскольку некоторые функции применялись в других моделях. Экспоненциальная функция полезности использовалась в задаче о распределении рисков. Выбор функции полезности (x) носит случайный характер. Он будет зависеть от различных экономических ситуаций, и его успех будет также основываться на правильном выборе функции полезности. Ряд функций полезности (x) показал, как можно использовать метод максимальной полезности. Информационная энтропия имеет широкий диапазон применимости, энтропии Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака успешно применяются в случае распределения ездок и распределения товаров соответственно. В этом исследовании демонстрируется эквивалентность между принципом максимальной полезности и максимальной энтропии, основанном на энтропиях Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Антонов, Д. В.** Основные принципы развития транспортных систем городов / Д.В. Антонов, О.А. Лебедева // Вестник Ангарской государственной технической академии. 2014. № 8. С. 149-155.
2. **Крипак, М. Н.** Оценка состояния улично-дорожной сети крупного города / М.Н. Крипак, О.А. Лебедева //Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 3 (51). С. 171-174.
3. **Лебедева, О. А.** Транспортная инфраструктура как основополагающий фактор эффективного функционирования экономики страны / О.А. Лебедева, Ю.О. Полтавская, З.Н. Гаммаева, Т.В. Кондратенко // Сборник научных трудов Ангарского государственного технического университета. 2018. Т. 1. № 15. С. 125-130.
4. **Шаров, М. И.** Влияние транспортного зонирования на функционирование маршрутной сети города / М.И. Шаров, О.А. Лебедева // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2019. № 2 (62). С. 196-202.
5. **Полтавская, Ю. О.** Методы сбора данных о продолжительности движения на маршруте и требования к объему выборки / Ю.О. Полтавская //Вестник Ангарского государственного технического университета. 2018. № 12. С. 192-195.
6. **Лебедева, О. А.** Сравнительный анализ методов решения транспортных задач при оптимальном планировании перевозочного процесса / О.А. Лебедева., В.Е. Гозбенко, А.А. Пыхалов, Ю.Ф. Мухопад // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2020. № 3 (67). С. 134-139.
7. **Полтавская, Ю. О.** Моделирование продолжительности движения по маршруту с учетом характеристик улично-дорожной сети / Ю.О. Полтавская, О.А. Лебедева // В книге: Новые информационные технологии в исследовании сложных структур. материалы Тринадцатой Международной конференции. Томский государственный университет. Томск, 2020. С. 101-102.
8. **Mazumder, S. K.** Um entropy and utility in a transportation system / S. K. Mazumder // Yugoslav Journal of Operations Research 9, 1999, Number 1, pp. 27-34.
9. **Niedercorn, J. H.** An Economic Derivation of the ‘Gravity Law’ of Spatial Interaction: Reply / J.H. Niedercorn, B.V. Bechdolt // Journal of Regional Science 10, 1970, pp. 407–410.
10. **Beckmann, M.** The soft science of predicting travellor behavior / M. Beckmann // Transportation Planning and Technology 1, 1973, pp. 175–181.