УДК 514.174.3

Нгуен Дык Минь,
Вьетнам, Иркутский национальный исследовательский технический университет
e-mail: nguyenducminh.mt@gmail.com

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПОКРЫТИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ШАРАМИ С РАВНЫМИ РАДИУСАМИ

Nguyen D.M.

NUMERICAL ALGORITHM FOR COVERING SURFACES OF REVOLUTION BY BALLS WITH EQUAL RADII

Аннотация. Рассмотрена задача построения тончайшего покрытия поверхностей вращения шарами, радиусы которых равны и заранее неизвестны. Предложен эвристический алгоритм ее решения, основанный на совместном применении оптико-геометрического подхода и геодезической диаграммы Вороного. Выполнены расчеты для некоторых поверхностей вращения, включая сферу.

Ключевые слова: задача покрытия, поверхность вращения, равные шары, диаграмма Вороного.

Abstract. The paper focuses on the problem of constructing the thinnest covering for surfaces of revolution by equal balls whose radii are unknown in advance. A heuristic algorithm based on the joint applying the optical-geometric approach and the geodesic Voronoi diagram is proposed. Calculations for some surfaces of revolution, including a sphere, are carried out.

Keywords: covering problem, surface of revolution, equal balls, Voronoi diagram.

Построение минимальных (тончайших) покрытий и максимальных (плотнейших) упаковок относится к классическим формулировкам вычислительной геометрии [1]. Такие проблемы изучаются уже на протяжении десятилетий, но до сих пор остаются актуальными [2,3]. Преимущественно рассматриваются покрытия плоских фигур конгруэнтными кругами в различных постановках [4-7]. Задача оптимального покрытия криволинейной поверхности заданным числом равных шаров изучена гораздо меньше. Наиболее очевидным приложением является размещение однотипных беспроводных датчиков и проектирование глобальных навигационных и коммуникационных систем. Во всех случаях покрываемая поверхность является поверхностью вращения. Другим применением является перенос изображения с криволинейной поверхности на плоскость для лазерной размерной обработки поверхностей вращения через плоскую маску [8].

Отметим, что во всех этих прикладных задачах может возникать искажение сигнала, приводящее к нарушению сферической формы зоны действия датчика или передатчика. Как правило, это свойство не учитывается. В данной работе предлагается использовать специальную неевклидову метрику для учета таких эффектов. Она отражает свойства окружающей среды, заменяя физическое расстояние временем, необходимым для его прохождения [9].

Математически, рассматриваемая задача покрытия поверхности S имеет вид

$$R \to \min,$$
$$\rho(O_i, p) \le R, \forall p \in S,$$
$$O_i \in S, i = 1, \dots, n.$$

Здесь n – число покрывающих шаров с центрами O_i радиусом R. Функция $\rho(a, b)$ задает расстояние между двумя точками и определяется из решения задачи:

$$\rho(a, b) = \int \frac{dG}{f(x, y, z)} \xrightarrow[G \in G(a,b)]{} \min.$$

Если непрерывная функция $f(x, y, z)$ есть мгновенная скорость движения, то $\rho(a, b)$ – минимальное время перемещения между точками $a, b \in S$.

Для решения данной задачи предложен эвристический алгоритм, основанный на совместном применении оптико-геометрического подхода [9] и геодезической диаграммы Вороного, позволяющий находить локально-оптимальные решения как для евклидова так и для неевклидова расстояния. Предложена глобализирующая процедура на основе метода мультистарта.

Проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого решались серии задач покрытия сферы, цилиндра и тора. В случаях, когда поверхности допускают развертывание, дополнительно проводилось покрытие разверток. На рисунке 1 представлены покрытия единичной сферы 20 кругами (слева) и 100 кругами (справа) и соответствующие им сферические диаграммы Вороного.

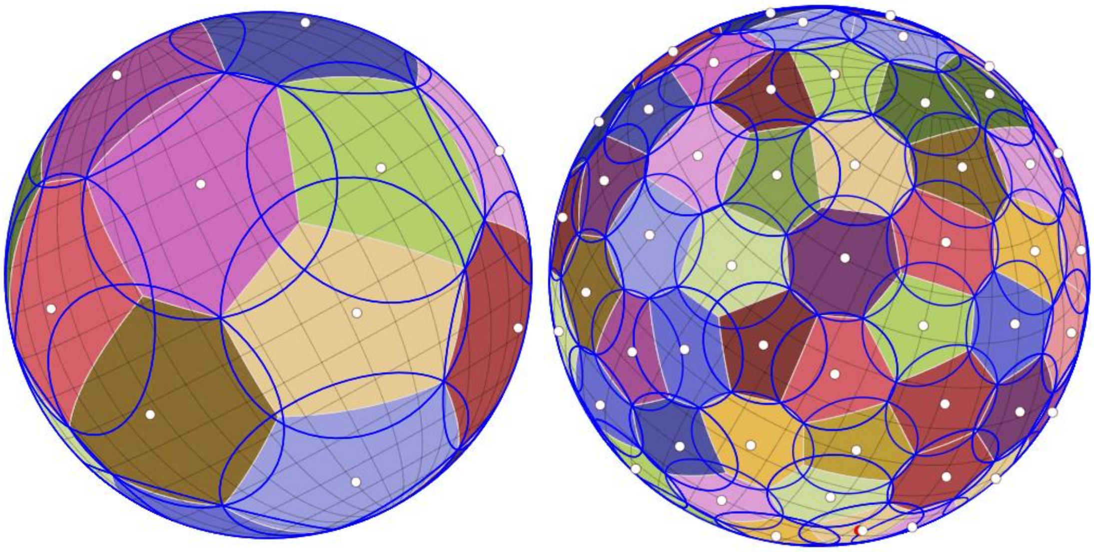

Рис. 1. Покрытие единичной сферы равными шарами.

Проведено сравнение результатов расчетов с известными, показавшее, что традиционные геометрические методы являются более быстрыми, а предложенный алгоритм дает более точные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тот Л.Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958. 364 с.
2. **Bezdek K., Langi Z.** From the separable Tammes problem to extremal distributions of great circles in the unit sphere // Discrete Comput. Geom. 2023. https://doi.org/10.1007/s00454-023-00509-w.
3. **Toth. G.F., Toth. L.F., Kuperberg W.** Miscellaneous problems about packing and covering // Lagerungen. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 2023. Vol. 360. P. 313-336.
4. **Тахонов И.И.** О некоторых задачах покрытия плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Vol. 21, № 1. P. 84-102.
5. **Dorninger D.** Thinnest covering of the Euclidean plane with incongruent circles // Analysis and Geometry in Metric Spaces. 2017. Vol. 5. P. 40–46.
6. **Лебедев П.Д., Стойчин К.Л.** Алгоритмы построения оптимального покрытия плоских фигур наборами кругов линейно различающихся радиусов // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 35-50.
7. **Lempert A. A., Kazakov A. L., Le Q. M.** On reserve and double covering problems for the sets with non-Euclidean metrics // Yugoslav Journal of Operations Research. 2019. Vol. 29, № 1. P. 69-79.
8. **Грицкевич О.В., Мещеряков Н.А., Подъянольский Ю.В.** Формирование оптического изображения произвольной геометрической формы на криволинейных поверхностях вращения // Автометрия. 1997. № 2. С. 26-33.
9. **Казаков А. Л., Лемперт А. А.** Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Т. 72, № 7. С. 50-57.