УДК. 51-74+517.2

Панов Леонид Алексеевич,
студент, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: leonid.panov2001@yandex.ru
Свердлова Ольга Леонидовна,
к.т.н., доцент, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: olgasv273@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ КОНСТРУКЦИИ МОСТА

Panov L.A., Sverdlova O.L.

DESIGNING A BRIDGE STRUCTURE WITH THE APPLICATION OF DIFFERENTIAL CALCULUS

Аннотация. В работе рассматривается применение методов дифференциального исчисления при проектировании строительных объектов.

Ключевые слова: оптимальное расположение, профиль, производная функции, математическая модель, парабола, касательная, угловой коэффициент.

Abstract. The article discusses the main aspects of the application of differential calculus in the bridge's structure design.

Keywords: optimal location; profile, derivative of function, mathematical model, parabolic curve, tangent line, slope ratio.

В наше время строительство является одной из самых важных отраслей современного общества в сфере материального производства. Оно включает в себя множество аспектов, таких как проектирование зданий и сооружений, выбор материалов, технологий строительства и многое другое. Но, как и любая техническая наука, строительство развивается в тесном взаимодействии и сотрудничестве с математикой. Это проявляется в использовании математического аппарата для решения научно-технических задач любого уровня.

При проектировании строительных сооружений для инженера одной из основных задач является построить адекватную математическую модель будущего объекта. Необходимым условием на пути построения математической модели является идеализация реальной системы в соответствии с поставленной задачей проектирования, что позволяет использовать для исследования системы различные математические методы: аналитические, графические и численные [1].

Представленные соотношения между элементами модели в аналитической форме позволяют использовать эффективные методы оптимизации, основанные на дифференциальном исчислении [2]. С помощью этих методов возможно решение следующих задач в строительстве [1]:

1. Оптимизация форм и размеров строительных объектов. Например, используя методы дифференциального исчисления, можно найти форму конструкции, которая будет иметь максимальную прочность при минимальном использовании материала.

2. Расчет нагрузокна строительные конструкции, такие как балки, колонны, стены и фундаменты, который очень важен для обеспечения безопасности и надежности будущих сооружений.

3. Исследование поведения конструкцийв динамике, учитывая силы инерции, колебания и вибрации.

4. Анализ стоимости строительства.

В самых простых моделях исследуемая величина зависит от одной переменной, что позволяет свести решение задачи к достаточно простым математическим моделям, использующим геометрическое значение производной и алгоритм для нахождения экстремумов функции.

В качестве примера построения математической модели строительной задачи, основанной на применении методов дифференциального исчисления, рассмотрим задачу об оптимальной конструкции пешеходного моста через реку Китой, который был излюбленным местом прогулок и отдыха для ангарчан.

Для решения поставленной задачи необходимо:

1. Показать, что место расположения старого Китойского моста было оптимальным, т.е. расстояние между двумя пунктами *A* и *B*, расположенными по разные стороны реки, наименьшее;

2. Определить углы въезда и съезда с моста с учетом того, что въезд и съезд были прямолинейными участками пути.

Рассмотрим план местности вблизи указанных условий, представленный на рисунке 1, и схематический чертеж, изображенный на рисунке 2.

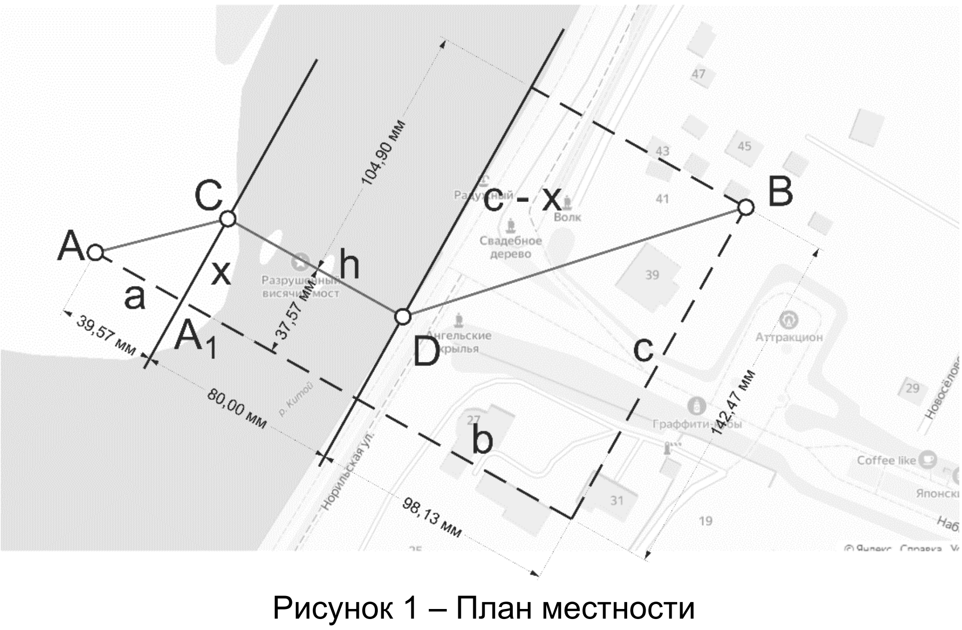

Рисунок 1 – План местности

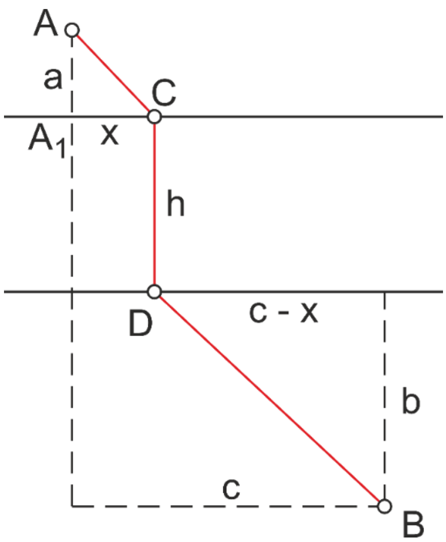

Рисунок 2 – Схематический чертеж плана местности вблизи указанных условий

Воспользуемся алгоритмом решения задач на отыскание оптимальных значений [3] для определения наименьшего расстояния между пунктами *A* и *B.*

Согласно условию задачи, длину дороги *l* между пунктами *A* и *B* находим по формуле:

$$l = AC + h + DB. \tag{1}$$

на рисунке расстояния *a*, *b*, *c* и *h* являются постоянными. Для построения математической модели введем переменную величину *x* – расстояние A_1C. Тогда

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad DB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}. \tag{2}$$

Подставим полученные выражения (2) в (1), математическая модель задачи будет иметь вид: найти такое значение $x \in [0;c]$, при котором функция

$$l(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \tag{3}$$

принимает наименьшее значение.

Опираясь на теорему Вейерштрасса и практическое правило нахождения оптимальных значений функции на отрезке [2], находим критические точки, лежащие внутри отрезка $[0;c]$:

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2 + (c-x)^2} + (x-c)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{(a^2 + x)\left[b^2 + (c-x)^2\right]}};$$

$$l'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{b^2 + (c-x)^2} + (x-c)\sqrt{a^2 + x^2} = 0 \Rightarrow x^2\left[b^2 + (c-x)^2\right] = (c-x)^2\left(a^2 + x^2\right),$$

$$x^2 b^2 = a^2 (c-x)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{ac}{a-b}, \\ x_2 = \dfrac{ac}{a+b}. \end{array}\right.$$

Точка $x_1 \notin [0;c]$, так как при $a > b, x_1 > c$; при $a < b, x_1 > 0$. Точка $x_2 \in [0;c]$ при любых положительных значениях *a*, *b*и*c*, так как при $x_2 > 0$ и $\frac{ac}{a+b} > 1$,т.е. $x_2 < c$. Таким образом, внутри отрезка $[0;c]$ функция $l(x)$ имеет одну критическую точку x_2. Нетрудно убедиться, что данная точка есть точка минимума, где непрерывная функция $l(x)$ имеет наименьшее значение функции из всех значений функции на данном отрезке. Следовательно, длина дороги между двумя пунктами *A* и *B*, расположенными по разные стороны от реки, будет наименьшей в том случае, если расстояние $A_1C = \frac{ac}{a+b}$ (4).

Подставляя исходные данные $a = 39,57\,м,\ b = 98,13\,м,\ c = 142,47\,м,\ h = 80\,м$ в расчетную формулу (4), получим $A_1C = \frac{39,57 \cdot 142,47}{39,57 + 98,13} \approx 40,94\,м$. Сравнивая полученный результат с геодезическими данными, где $A_1C = 37,57\,м$, можно сделать вывод о том, что отклонение расчетных размеров от реальных данных составляет приближенно $3,37\,м$, что вполне допустимо.

Для нахождения углов въезда и съезда с моста будем учитывать, что в вертикальном сечении профиль моста представляет параболу, ветви которой направлены вниз [4,5]. Уравнение профиля (параболы) будет иметь вид

$$y = ax^2 + c\,, \tag{5}$$

где c – высота моста, $a < 0, c > 0$.

Используя исходные данные: длину моста, которая составляет 80 метров, и высоту – 2 метра, поместим профиль моста в *ПДСК* – Oxy (рис. 4). Кривая DMC – парабола (профиль моста), где точки D и C имеют координаты $D(-40;0)$ и $C(40;0)$, а прямые DK и KCкасаются параболы в точках D и C.

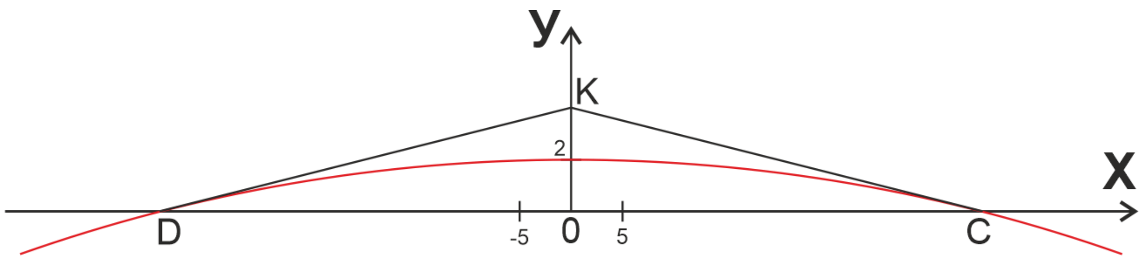

Рисунок 4 – Профиль моста

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид: найти угловые коэффициенты касательных DK и KCк параболе DMC, которые определяют углы въезда на мост и съезда с моста.

Для решения поставленной задачи находим коэффициент a, учитывая, что $c = 2$ и кривая проходит через точку $C(40;0)$:

$$0 = a \cdot 40^2 + 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{800}.$$

Следовательно, уравнение параболы (профиля моста) имеет вид

$$y = -\frac{1}{800}x^2 + 2. \qquad (6)$$

Принимая во внимание, что тангенс угла наклона касательной к графику функции равен значению производной функции в данной точке, находим производную функции (6):

$$y' = -\frac{1}{800} \cdot 2x = -\frac{x}{400},$$

вычисляем значение производной в точках D, C и определяем искомые углы:

$$tg\angle KDO = y'(-40) = \frac{40}{400} = 0{,}1 \Rightarrow \angle KDO = arctg\, 0{,}1 = 5^0 43' \qquad (7)$$

$$tg\angle KCX = y'(40) = -\frac{40}{400} = -0{,}1 \Rightarrow \angle KCX = arctg(-0{,}1) = 174^0 17'. \qquad (8)$$

На основании полученных расчетов можно сделать вывод, что расположение пешеходного моста через реку Китой было оптимальным, а углы въезда и съезда должны составлять $5^0 43'$ и $174^0 17'$ соответственно. Таким образом, с помощью эффективных методов оптимизации, основанных на дифференциальном исчислении, были найдены актуальные значения параметров при проектировании конструкции моста.

ЛИТЕРАТУРА

1.**Сигорский, В.П.** Математический аппарат инженера. Издание 2-е, стереотипное / В.П. Сигорский. – Киев: Техніка, 1977. – 768 с.

2. **Свердлова, О.Л.** Применение производной функции при решении оптимизационных задач / О.Л. Свердлова, Л.М. Кондратьева, В.В. Давидюк // Современные технологии и научно-технический прогресс: Междунар. научн.-техн. конф. имени проф. В.Я. Баденикова: Тез. докл. – Ангарск: ФГБОУ ВО АнГТУ, 2023.

3. **Запорожец, Г.И.** Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – М.: Издательство «Высшая школа», 1964. – 480 с. – Библиогр.: с. 60-135.

4. **Никитин, К.Е.** Математическое моделирование в строительстве: методические указания по выполнению лабораторных работ для направления подготовки 08.04.01 «Строительство» / К.Е. Никитин. – Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2017. – 51 с.

5. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.I. / Н. С. Пискунов. – М: Интеграл-Пресс, 2006. – 416 с. Библиогр.: с.60-65. – 3000 экз. – ISBN 5-89602-012-0 (т. I). – Текст: непосредственный.