УДК 681.5

Истомин Андрей Леонидович,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: a.l.istomin@mail.ru
Кривов Максим Викторович,
заведующий кафедрой «Вычислительные машины и комплексы»,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: vmk@angtu.ru
Колмогоров Алексей Геннадьевич,
заведующий кафедрой «Автоматизация технологических процессов»,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: atp@angtu.ru
Кобозев Владимир Юрьевич,
старший преподаватель кафедры «Автоматизация технологических процессов»,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: vladimir-kobozeff@ya.ru

ЗАДАЧА О БЫСТРОДЕЙСТВИИ НАГРЕВА ЖИДКОГО ПРОДУКТА ЖИДКИМ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕМ В ЕМКОСТИ С РУБАШКОЙ

Istomin A.L., Krivov M.V., Kolmogorov A.G., Kobozev V.Y.

OPTIMAL SPEED PROBLEM HEATING OF A LIQUID PRODUCT BY LIQUID COOLANT IN A TANK WITH A SHIRT

Аннотация. *На основе принципа максимума Понтрягина поставлена и решена задача о быстродействии нагрева жидкого продукта жидким теплоносителем. Приведены математическая модель объекта, динамические характеристики переменных объекта и найденное оптимальное управление.*

Ключевые слова: *задача о быстродействии, оптимальное управление, нагрев жидкого продукта.*

Abstract. *Based on the Pontryagin maximum principle, the problem of the speed of heating a liquid product with a liquid coolant is posed and solved. The mathematical model of the object, the dynamic characteristics of the variables of the object and the optimal control found are given.*

Keywords*: the task is about speed, optimal control, heating of the liquid product.*

На предприятиях пищевой, химической и нефтехимической промышленности часто встречается задача нагрева или охлаждения жидкого сырья или продуктов переработки в емкостях, оснащенных «рубашками» с циркулирующим в них теплоносителем или хладоагентом. В больших емкостях как для нагрева, так и охлаждения содержимого до нужной температуры требуются значительные энергетические затраты. Поэтому управление тепловыми процессами часто является определяющим фактором в технико-экономических показателях производства.

В данной работе поставлена и решена задача нагрева продукта до заданной температуры за наименьшее время.

Рассмотрим емкость с мешалкой, оснащенную снаружи рубашкой, в которую непрерывно подается жидкий теплоноситель (рис. 1).

Нагрев продукта до заданной температуры осуществляется после полной загрузки продукта в емкость, конвективные потоки продукта на входе и выходе емкости в процессе нагрева отсутствуют.

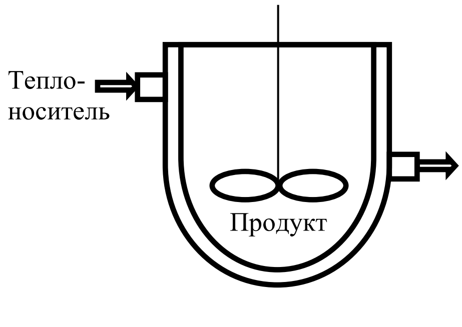

Рис.1. Схема потоков в емкости с рубашкой

Передача тепла от теплоносителя продукту осуществляется через разделяющую емкость и рубашку поверхность. В рассматриваемой емкости установлено перемешивающее устройство, поэтому можно принять допущение, что в емкости отсутствует передача тепла теплопроводностью. Поскольку в рубашку непрерывно подается теплоноситель, имеются конвективные потоки теплоносителя на входе и выходе рубашки. Как и для емкости, примем допущение о том, что передача тепла в рубашке за счет теплопроводности незначительна. По этой причине и емкость, и рубашку емкости можно описать моделью для аппарата идеального смешения [1] (периодического – для емкости, непрерывного – для рубашки).

Уравнения скорости изменения температуры в емкости T_1 и рубашке T_2 в виде уравнений Коши будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dT_1}{dt} = \dfrac{k_T F}{V_1 \rho_1 c_{\rho 1}}(T_2 - T_1), \\ \dfrac{dT_2}{dt} = \dfrac{u}{V_2}(T_2^{вх} - T_2) + \dfrac{k_T F}{V_2 \rho_2 c_{\rho 2}}(T_1 - T_2), \end{cases} \quad (1)$$

где k_T – коэффициент теплопередачи, кДж/(м$^2\cdot{}^0$С·с); F – поверхность теплообмена, м^2; V_1 и V_2 – объемы емкости и рубашки соответственно, м^3; ρ_1 и ρ_2 – плотности продукта и теплоносителя, кг/м^3; $c_{\rho 1}$ и $c_{\rho 2}$ – удельные теплоемкости продукта и теплоносителя, кДж/(кг·^{0}С); $T_2^{вх}$ – температура теплоносителя на входе в рубашку, ^{0}С; u – объемный расход теплоносителя в рубашку, м^3/с.

Для дальнейшего удобства представим систему уравнений (1) в следующем виде

$$\begin{cases} \dfrac{dT_1}{dt} = a_1(T_2 - T_1), \\ \dfrac{dT_2}{dt} = a_2(T_1 - T_2) + u(a_3 - a_4 T_2), \end{cases} \quad (2)$$

где $a_1 = \dfrac{k_T F}{V_1 \rho_1 c_{\rho 1}}$, $a_2 = \dfrac{k_T F}{V_2 \rho_2 c_{\rho 2}}$, $a_3 = \dfrac{T_2^{вх}}{V_2}$, $a_4 = \dfrac{1}{V_2}$.

Зададим граничные условия для обеих переменных в начальный $t_н = 0$ и конечный $t_к = T$ моменты времени:

$$T_1(0) = T_1^0,\ T_2(0) = T_2^0,\ T_1(T) = T_1^T,\ T_2(T) = T_2^T. \quad (3)$$

Управляющим воздействием в задаче нагрева жидкого продукта в емкости с рубашкой является расход теплоносителя, подаваемого в рубашку.

Функционал качества управления в задаче о быстродействии задается в виде

$$J = \int_0^T 1\,dt = T \to \min. \quad (4)$$

Укажем ограничение, налагаемое на расход теплоносителя в рубашку емкости

$$0 \le u \le U_{\max}. \quad (5)$$

Требуется определить такой расход теплоносителя в рубашку $u^*(t)$, который обеспечивает перевод объекта в заданное состояние за минимальное время.

Уравнения системы (2) являются линейными, поэтому принцип максимума Понтрягина будет и необходимым, и достаточным условием оптимальности для решения поставленной задачи [2].

Составим гамильтониан для заданной задачи

$$\begin{aligned} H(T,\psi,u) = -1\cdot\psi_0 + \psi_1 a_1(T_2 - T_1) + \\ + \psi_2\left[a_2(T_1 - T_2) + u(a_3 - a_4 T_2)\right] \end{aligned}, \quad (6)$$

где $\psi_i, i = \overline{0,2}$ - сопряженные функции к системе уравнений (2) и подынтегральному выражению в функционале (4).

Рассматривая в гамильтониане только член, зависящий от искомого управление $u(t)$ и сопряженных функций, получим из выражения (6)

$$\bar{H}(T,\psi,u) = \psi_2 u(a_3 - a_4 T_2). \quad (7)$$

Чтобы гамильтониан (6) принимал максимальное значение, необходимо всякий раз, когда $\psi_2(a_3 - a_4 T_2) > 0$, соблюсти управление $u(t) = U_{\max}$ и $u(t) = 0$ в случае, когда $\psi_2(a_3 - a_4 T_2) \le 0$. Поскольку разница $a_3 - a_4 T_2$ всегда больше или равна нулю (в данной задаче температура теплоносителя в рубашке не может быть больше температуры теплоносителя на входе в рубашку), максимум гамильтониана $H(T,\psi,u)$ определяется знаком функции ψ_2

$$u^*(t) = \begin{cases} U_{\max}, & если \quad \psi_2 > 0, \\ 0, & если \quad \psi_2 \le 0. \end{cases} \quad (8)$$

Закон управления (8) справедлив на всем интервале управления $t \in [0, T]$.

Для нахождения оптимального управления, в том числе количество переключений управления между $u(t) = 0$ и $u(t) = U_{\max}$, необходимо определить выражение для сопряженной функции $\psi_2(t)$, при которой система уравнений (2) удовлетворяет граничным условиям (3).

Сопряженные переменные определяются уравнениями

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0,2}, \tag{9}$$

и выглядят следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_o}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\psi_1}{dt} = a_1\psi_1 - a_2\psi_2 \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + a_4u\psi_2. \end{cases} \tag{10}$$

Общее решение системы уравнений (10) имеет вид

$$\psi_0(t) = S_0, \tag{11}$$

$$\psi_1(t) = S_1e^{-\alpha t} + S_2e^{-\beta t}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t) = S_1e^{-\alpha t}\left(-\alpha/a_2 + a_1/a_2\right) + \\ + S_2e^{-\beta t}\left(-\beta/a_2 + a_1/a_2\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\alpha = \frac{a_2\left[-(1 + a_1/a_2 + ua_4/a_2)\right]}{2} + \\ + \frac{\sqrt{(1 + a_1/a_2 + ua_4)^2 - 4ua_1a_4/a_2}}{2},$$

$$\beta = \frac{a_2\left[-(1 + a_1/a_2 + ua_4/a_2)\right]}{2} - \\ - \frac{\sqrt{(1 + a_1/a_2 + ua_4)^2 - 4ua_1a_4/a_2}}{2},$$

а S_0, S_1, S_2 – постоянные интегрирования системы (10).

Из выражения (13) видно, что функция $\psi_2(t)$ при любых значениях S_1 и S_2 не более одного раза меняет знак на отрезке времени t. Это означает, что управление $u(t)$ состоит из не более двух интервалов управления с $u(t) = 0$ и $u(t) = U_{\max}$.

Обыкновенно постоянные интегрирования в решении дифференциальных уравнений определяются из начальных условий, но начальные условия для сопряженных функций неизвестны. Неизвестны они и для конечных условий. Их роль выполняют начальные и конечные условия для температур. Поэтому, постоянные интегрирования для сопряженных функций найдем после определения T - времени функционирования объекта под воздействием управления $u(t)$. Для этого проинтегрируем уравнения системы (2).

Очевидно, что в начальный момент времени при $t = 0$ объект функционирует под воздействием управления $u(t) = U_{\max}$.

Общее решение системы уравнений (2) с управляющим воздействием $u(t) = U_{\max}$ выглядит следующим образом

$$T_1^н(t) = C_1^н e^{k_1 t} + C_2^н e^{k_2 t} + k_3, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} T_2^н(t) = C_1^н e^{k_1 t}\left(k_1/a_1 + 1\right) + \\ + C_2^н e^{k_2 t}\left(k_2/a_1 + 1\right) + k_3 \end{aligned}, \tag{15}$$

где $T_1^н(t)$ и $T_2^н(t)$ – функции температуры в емкости и рубашке в начальный момент времени, $C_1^н, C_2^н$ – постоянные интегрирования системы (2) для начального момента времени, а значения k_1, k_2 и k_3 в выражениях (14) и (15) находятся как

$$k_1 = \frac{a_1\left[-(1 + a_2/a_1 + U_{\max}a_4/a_1)\right]}{2} + \\ + \frac{\sqrt{(1 + a_2/a_1 + U_{\max}a_4)^2 - 4U_{\max}a_4/a_1}}{2},$$

$$k_2 = \frac{a_1\left[-(1 + a_2/a_1 + U_{\max}a_4/a_1)\right]}{2} - \\ - \frac{\sqrt{(1 + a_2/a_1 + U_{\max}a_4)^2 - 4U_{\max}a_4/a_1}}{2},$$

$$k_3 = a_3/a_4.$$

Используя начальные условия при $t = 0$, определяем постоянные интегрирования:

$$C_1^н = \frac{k_2\left[k_3 - T_1^0\right] - a_1\left[T_1^0 - T_2^0)\right]}{(k_1 - k_2)e^{k_1 t}},$$

$$C_{2_1}^н = -\frac{k_1\left[k_3 - T_1^0\right] - a_1\left[T_1^0 - T_2^0\right]}{(k_1 - k_2)e^{k_2 t}}.$$

В конечный момент времени при $t = T$ объект функционирует под воздействием управления $u(t) = 0$, а общее решение системы уравнений (2) имеет вид

$$T_1^к(t) = C_1^к e^{kt} + C_2^к, \tag{16}$$

$$T_2^н(t) = C_1^к e^{kt}\left(k/a_1 + 1\right) + C_2^к, \tag{17}$$

где $T_1^к(t)$ и $T_2^к(t)$ – функции температуры в емкости и рубашке в конечный момент времени $t = T$, $C_1^к, C_2^к$ – постоянные интегрирования системы (2) для конечного момента времени, а значение k в выражениях (16) и

(17) находится как $k=-a_1(1+a_2/a_1)$.

Используя условия на конец управления при $t=T$, определяем постоянные интегрирования:

$$C_1^к=\frac{\left[T_1^T-T_2^T)\right]a_1e^{-kt}}{a_1+a_2},$$

$$C_2^к=\frac{\left[a_2T_1^T-a_1T_2^T\right]k}{a_1+a_2}.$$

Время управления T и время смены управляющего воздействия τ находятся из условия неразрывности решения в момент времени τ

$$\begin{cases}C_1^н e^{k_1\tau}+C_2^н e^{k_2\tau}+k_3=C_1^к e^{k\tau}+C_2^к,\\ C_1^н e^{k_1T}\left(k_1/a_1+1\right)+C_2^н e^{k_2T}\left(k_2/a_1+1\right)+k_3= \\ =C_1^к e^{kT}\left(k/a_1+1\right)+C_2^к.\end{cases} \quad (18)$$

Руководствуясь условием теоремы принципа максимума Понтрягина, согласно которому на интервале управления $t\in[0,T]$ выполняется тождество

$$H\left[T^*(t),\psi^*(t),u^*(t)\right]\equiv 0$$

из уравнений гамильтониана в начальный и конечный моменты времени определяются постоянные интегрирования S_1, S_2 и искомое выражение для сопряженной функции

$$\psi_2(t)=S_1e^{-\alpha t}\left(-\alpha/a_2+a_1/a_2\right)+$$
$$+S_2e^{-\beta t}\left(-\beta/a_2+a_1/a_2\right).$$

Приведем пример решения.

В табл. 1 приведены конструктивные и теплофизические параметры объекта управления.

Таблица 1 - Параметры объекта управления

Наименование	Обозначение	Единицы измерения
Объем емкости	$V_1=10$	м^3
Объем рубашки	$V_2=3$	м^3
Поверхность теплообмена	$F=30$	м^2
Коэффициент теплопередачи	$k_T=1,1$	кДж/(м$^2\cdot{}^0$С·с);
Плотность продукта	$\rho_1=906$	кг/м^3
Плотность греющей воды	$\rho_2=960$	кг/м^3
Удельная теплоемкость продукта	$c_{p1}=1,7$	кДж/(кг·^{0}С)
Удельная теплоемкость греющей воды	$c_{p2}=4,2$	кДж/(кг·^{0}С)
Температура греющей воды на входе в рубашку	$T_2^{вх}=95$	^{0}С
Допустимые границы изменения расхода греющей воды в рубашку	$0\le u\le 0,008$	м^3/с

Граничные условия для переменных в начальный $t_н=0$ и конечный $t_k=T$ моменты времени:

$T_1(0)=10\,^0$С, $T_2(0)=20\,^0$С, $T_1(T)=60$ ^{0}С, $T_2(T)=60\,^0$С.

В начальный момент времени при $t_н=0$ под воздействием управления в соответствии с (14), (15) объект описывается уравнениями

$$T_1^н(t)=95-82,605e^{-0,0011t}-2,395e^{-0,05t},$$
$$T_2^н(t)=95-78,22e^{-0,0011t}-3,221e^{-0,05t},$$

а в конечный момент времени при $t_к=T$, при $u(T)=0$ решение системы уравнений (2) в соответствии с (16), (17) имеет вид

$$T_1^к(t)=-1,907\cdot 10^{-6}\cdot e^{0,049t}+60,$$
$$T_2^к(t)=-1,907\cdot 10^{-6}\cdot 3,273e^{0,049t}+60.$$

Время смены управляющего воздействия составило $\tau=749$ секунд, время управления T – 777 секунд.

Постоянные интегрирования сопряженных функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ найдены из уравнений равенства гамильтониана нулю в начальный и конечный моменты времени. Выражения для сопряженных функций выглядят следующим образом:

$$\psi_1(t)=6,225e^{-0,00123t},$$
$$\psi_2(t)=4,585e^{-0,00123t}.$$

Результаты решения задачи оптимального нагрева продукта в емкости приведены на рис.2 и 3.

Из анализа графика на рис. 2 видно, что управление носит кусочно-непрерывный характер.

Управляющее воздействие $u(t)$ принимает только свои граничные значения. Момент смены знака управляющего воздействия $u(t)$ на рис. 2 совпадает с моментом времени перехода функции $\psi_2(t)$ через нуль на рис. 3. Условия принципа максимума выполнены. Наименьшее время перевода объекта из начального в конечное состояние составило 777 секунд. Объем затраченного теплоносителя составил 5,99 м^3.

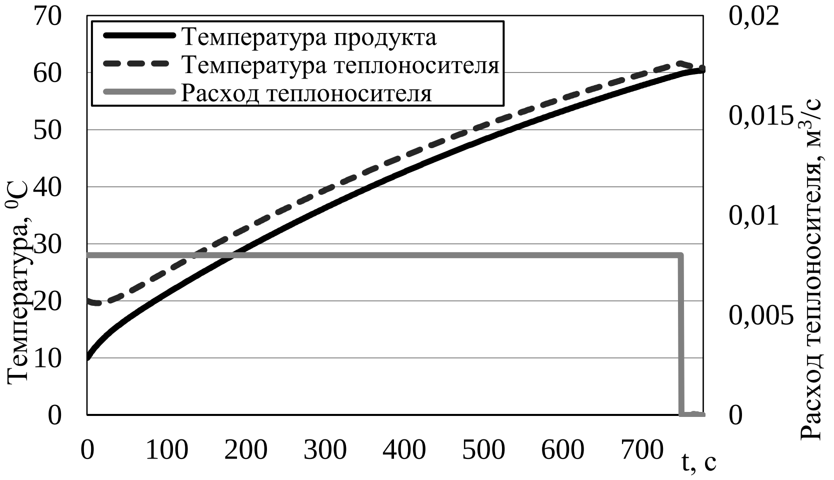

Рисунок 2 - Динамические характеристики и закон управления

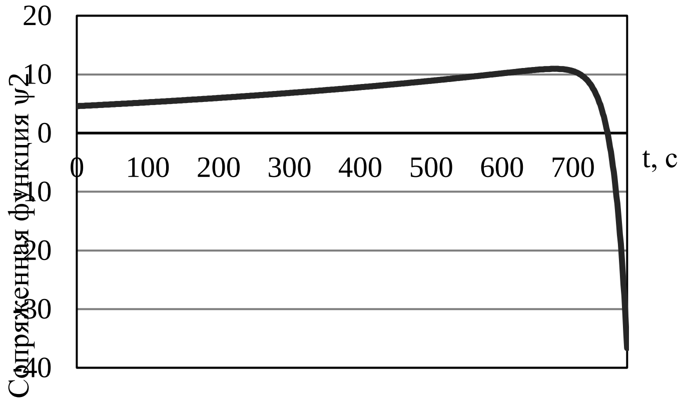

Рисунок 3 - График сопряженной функции $\psi_2(t)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кафаров В.В.** Методы кибернетики в химии и химической технологии. – М.: Химия, 1985. – 448 с.

2. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов . 4-е издание, - М.: Наука, 1983. – 392 с.

3. **Плющаев В.И., Пахомов А.М.** Модель системы стабилизации температуры продукта в емкости с переменной массой // Автоматизация и современные технологии. – М.: 2005. - № 6. – С. 25-28.

4. **Кудряшов В.С., Алексеев М.В., Юдаков А.А.** Разработка математической модели стадии нагрева резиновой смеси и синтез алгоритма управления нагревом с использованием принципа максимума Понтрягина // Вестник ВГУИТ, - № 2, 2017. – С. 80-87.