

Сенотова Светлана Анатольевна,
к.т.н., доцент, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: sveta-senotova@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Senotova S.A.

ASYMPTOTIC STABILITY OF STATIONARY MOTION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS

Аннотация. Исследована асимптотическая устойчивость стационарного движения уравнений Навье-Стокса.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, стационарное движение, асимптотическая устойчивость.

Abstract. Asymptotic stability of stationary motion of Navier-Stokes equations is investigated.

Keywords: Navier-Stokes equations, stationary motion, asymptotic stability.

Уравнения Навье – Стокса представляют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и описывают движение жидких и газообразных сред при наличии вязкости. Эти уравнения имеют большое практическое значение в различных областях: метеорология, океанология, гидрология, кораблестроение, авиация.

Рассмотрим трехмерное движение вязкой несжимаемой жидкости, которое описывается системой уравнений Навье-Стокса [1]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (3)$$

и условие неразрывности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

В уравнениях (1) – (4) v_x – проекция скорости на ось Ox , v_y – проекция скорости на ось Oy , v_z – проекция скорости на ось Oz , p – давление.

Стационарное движение

$$\begin{aligned} v_{x0} &= \text{const} \\ v_{y0} &= \text{const} \\ v_{z0} &= \text{const} \\ p_0 &= \text{const} \end{aligned} \quad (5)$$

является частным решением системы уравнений (1)-(4).

Рассмотрим отклонения от стационарного движения

$$\begin{aligned}v_x &= v_{x0} + u_x \\v_y &= v_{y0} + u_y \\v_z &= v_{z0} + u_z \\p &= p_0 + q\end{aligned}\tag{6}$$

Подставим формулы (6) в уравнения (1)-(4). После преобразований получим систему в отклонениях:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} - (v_{x0} + u_x) \frac{\partial u_x}{\partial x} - (v_{y0} + u_y) \frac{\partial u_x}{\partial y} - (v_{z0} + u_z) \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial y} - (v_{x0} + u_x) \frac{\partial u_y}{\partial x} - (v_{y0} + u_y) \frac{\partial u_y}{\partial y} - (v_{z0} + u_z) \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} - (v_{x0} + u_x) \frac{\partial u_z}{\partial x} - (v_{y0} + u_y) \frac{\partial u_z}{\partial y} - (v_{z0} + u_z) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

Введем в рассмотрение функционал Ляпунова [2]

$$V = \frac{1}{2} \int (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dv, \tag{11}$$

где $dv = dx dy dz$. Под записью (11) будем понимать интеграл, распространенный на весь объем. Функционал (11) определенно положителен и непрерывен по мере

$$\rho = \int (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dv, \tag{12}$$

Производная функционала в силу уравнений (7)-(9) определенно отрицательна. На основании теоремы [1] можно сделать вывод, что стационарное движение (5) асимптотически устойчиво по мере (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Колесниченко В.И.** Введение в механику несжимаемой жидкости : учеб. пособие / В.И. Колесниченко, А.Н. Шарифулин. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2019. – 127 с.
2. **Сиразетдинов Т.К.** Устойчивость систем с распределенными параметрами. / Т. К. Сиразетдинов. – Новосибирск: Наука. – 1987.