УДК 681.5

Истомин Андрей Леонидович,
д.т.н., профессор ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: a.l.istomin@mail.ru
Кривов Максим Викторович,
к.т.н., доцент, заведующий кафедрой «Вычислительные машины и комплексы»,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: vmk@angtu.ru
Истомина Алена Андреевна,
к.т.н., доцент кафедры «Технология электрохимических производств»,
ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»,
e-mail: alenaist@yandex.ru

ПОДЪЕМ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ НА ЗАДАННУЮ ВЫСОТУ ЗА ФИКСИРОВАННОЕ ВРЕМЯ ПРИ МИНИМАЛЬНОМ РАСХОДЕ ЭНЕРГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Istomin A.L., Krivov M.V., Istomina A.A.

LIFTING A METEOROLOGICAL MISSILE TO A SET HEIGHT IN A FIXED TIME WITH MINIMAL CONTROL ENERGY USAGE

Аннотация. *Методом вариационного исчисления решена задача подъема ракеты на заданную высоту за фиксированное время при минимальном расходе топлива. Задача нахождения оптимальных траекторий переменных и управления сформулирована как краевая задача с недостающими начальными условиями, поиск которых реализован с помощью разностного метода решения краевой задачи.*

Ключевые слова: *оптимальное управление, принцип максимума, управление ракетой.*

Abstract. *Using the method of variational calculus, the problem of lifting a rocket to a given height in a fixed amount of time with minimal fuel consumption has been solved. The problem of finding optimal trajectories of variables and controls has been formulated as an edge problem with missing initial conditions, which have been found using the difference method for solving edge problems.*

Keywords*:* *optimal control, variational calculus, rocket control.*

Задача управления подъемом метеорологической ракеты рассматривалась в работах [1-3]. В отличие от этих работ в данной статье исследуется задача подъема метеорологической ракеты на заданную высоту за фиксированное время при минимальной энергии управляющего воздействия.

Для постановки задачи оптимального управления необходимы:

1) математическая модель, описывающая поведение метеорологической ракеты в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений;

2) ограничение на управляющую функцию;

3) критерий оптимальности, оценивающий достижение заданной цели.

При составлении модели прямолинейного движения ракеты примем допущение о незначительном влиянии аэродинамического сопротивления. Также будем считать значение ускорения свободного падения постоянным, не зависящем от высоты подъема ракеты.

Обозначим вертикальную координату ракеты через h (высота подъема ракеты, м); скорость ракеты через v, м/с; массу ракеты через m, кг. Ракета обладает некоторым запасом топлива.

Тогда уравнения движения ракеты можно описать следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\beta \cdot u}{m} - g, \\ \dfrac{dm}{dt} = -u, \end{cases} \tag{1}$$

где β – импульс двигателя ракеты, м/с; u – массовый расход топлива, кг/с; g – ускорение свободного падения, м/с^2.

Начальные условия для переменных в момент времени $t = 0$:

$$h(0) = 0,\ v(0) = 0,\ m(0) = M, \tag{2}$$

где M – масса ракеты с топливом.

Управлением метеорологической ракеты является расход топлив u. Требуется найти управление $u(t)$, позволяющее поднять ракету на заданную высоту H за фиксированное время T при минимальном квадрате расхода топлива

$$J = \int_0^T u^2(t)dt \to \min \tag{3}$$

при выполнении ограничения

$$0 \le u(t) \le U_{\max} . \tag{4}$$

Введем граничные условия в момент времени $t = T$:

$$h(T) = H , \; v(T) = 0 . \tag{5}$$

Масса ракеты в момент времени $t = T$ неизвестна и подлежит определению в результате нахождения оптимального управления.

Составим гамильтониан задачи:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \psi_0 u^2 + \psi_1 v + \psi_2 (\beta u / m - g) + \\ + \psi_3 (-u). \end{aligned} \tag{6}$$

Найдем частную производную гамильтониана (6) по управлению u и из равенства нулю этой производной определим выражение для управления как функцию времени:

$$\frac{\partial \hat{H}(T, \psi, u)}{\partial u} = 2\psi_0 u + \psi_2 \beta / m - \psi_3 = 0 .$$

Принимая во внимание, что число ψ_0 является константой и равно $\psi_0 = -1$ [4], управляющее воздействие примет вид:

$$u = \frac{\psi_2 \beta}{2m} - \frac{\psi_3}{2} . \tag{7}$$

Для нахождения оптимального управления (7) необходимо определить выражения для сопряженных функций $\psi_2(t)$ и $\psi_3(t)$, при которых система уравнений (1) удовлетворяет граничным условиям (2) и (5).

Уравнения для сопряженных функций имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\dfrac{d\hat{H}}{dh} = 0, \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\dfrac{d\hat{H}}{dv} = -\psi_1, \\ \dfrac{d\psi_3}{dt} = -\dfrac{d\hat{H}}{dm} = \psi_2 \dfrac{\beta u}{m^2}. \end{cases} \tag{8}$$

Составим расширенную систему с учетом управления (7):

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\beta^2 \psi_2}{2m^2} - \dfrac{\beta \psi_3}{2m} - g, \\ \dfrac{dm}{dt} = -\dfrac{\beta \psi_2}{2m} + \dfrac{\psi_3}{2}, \\ \dfrac{d\psi_1}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1, \\ \dfrac{d\psi_3}{dt} = \dfrac{\beta^2 \psi_2^2}{2m^2} - \dfrac{\beta \psi_2 \psi_3}{2m^2}. \end{cases} \tag{9}$$

В результате получаем краевую двухточечную задачу удвоенной размерности по сравнению с системой (1). Дифференциальные уравнения этой задачи содержат три уравнения движения объекта и три уравнения для сопряженных функций. Кроме этих неизвестных функций в уравнения двухточечной краевой задачи входит и функция управления, выраженная через прямые и сопряженные функции. Система уравнений (9) является нелинейной и не имеет аналитического решения. Ее решение возможно только численными методами.

В дальнейшем исследование показало, что решить краевую задачу наиболее известным алгоритмом для решения краевых задач, называемым методом стрельбы или пристрелки [5], который заключается в последовательном подборе недостающих начальных условий на левой границе интервала, и решении затем полученной задачи Коши до приведения к заданным граничным условиям на правой границе интервала, оказалось невозможным в силу жесткости системы (9) (значения переменных объекта и сопряженных функций различаются на порядки).

Эффективным способом нахождения недостающих начальных условий для краевой задачи (9) оказался разностный метод [6]. Для этого временной расчетный интервал покрывался сеткой из N точек с $N-1$ шагами решения. Дифференциальные уравнения системы (9) заменялись на их разностные аналоги:

$$\begin{cases} h_{i+1}-h_i-\Delta\cdot v_i=0, \\ v_{i+1}-v_i-\Delta\left(\dfrac{\beta^2\psi_{2,i}}{2m_i^2}-\dfrac{\beta\psi_{3,i}}{2m_i}-g\right)=0, \\ m_{i+1}-m_i-\Delta\left(\dfrac{\psi_{3,i}}{2}-\dfrac{\beta\psi_{2,i}}{2m_i}\right)=0, \\ \psi_{1,i+1}-\psi_{1,i}=0, \\ \psi_{2,i+1}-\psi_{2,i}+\Delta\cdot\psi_{1.i}=0, \\ \psi_{3,i+1}-\psi_{3,i}-\Delta\left(\dfrac{\beta^2\psi_{2,t}^2}{2m_i^2}-\dfrac{\beta\psi_{2,i}\psi_{3,i}}{2m_i^2}\right)=0, \end{cases} \quad (10)$$

где Δ – шаг сетки.

Полная система нелинейных алгебраических уравнений для $N-1$ шагов сетки состояла из $N-1$ систем (10) с неизвестными h_i, v_i и m_i ($i=\overline{1,N-1}$), $\psi_{1,i}$, $\psi_{2,i}$, $\psi_{3,i}$ ($i=\overline{0,N-1}$) и шестью начальными и граничными условиями:

$h_0=0$, $v_0=0$, $m_0=M$, $h_N=H$, $v_N=0$, $\psi_{3,N}=0$. (11).

Последнее граничное условие из (11) определяется условием трансверсальности [7], согласно которому на правом конце функция сопряженности $\psi_3(T)$ равна нулю, так как нет условия на конец траектории переменной m (массы ракеты) в конце управления $t=T$.

Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решалась методом Ньютона, называемым также методом касательных.

Если начальное приближение выбрано достаточно хорошо для корней уравнений, то метод Ньютона сходится очень быстро и удобен для практического использования.

Найденные начальные условия для сопряженных переменных обеспечивали приведение объекта к заданным граничным условиям, при которых функционал (3) принимал минимальное значение.

Рассмотрим пример. Найти такую функцию квадрата расхода топлива, при которой метеорологическая ракета поднимется на высоту 50000 м за 150 секунд при минимуме квадрата расхода топлива. В качестве данных для решения задачи приняты конструктивные показатели советской метеорологической ракеты МР-25. В таблице 1 приведены конструктивные параметры ракеты МР-25 [1].

Таблица 1 – Параметры ракеты МР-25

Наименование	Обозначение	Единицы измерения
Импульс двигателя	$\beta=2011$	м/с
Масса пустой ракеты	$M_0=420$	кг
Масса ракеты с топливом	$M=1620$	кг
Предельные границы расхода топлива	$0\le u\le 50$	кг/с

Начальные и граничные условия для переменных в начальный $t=0$ и конечный $t=T$ моменты времени:

$$h(0)=0,\ v(0)=0,\ m(0)=1620,$$
$$h(T)=50000,\ v(T)=0,\ \psi_3(T)=0. \quad (12)$$

Система уравнений (10) с шагом сетки $\Delta=1$ с примет вид:

$$\begin{cases} h_{i+1}-h_i-v_i=0, \\ v_{i+1}-v_i-\dfrac{202,206\cdot10^4\psi_{2,i}}{m_i^2}+ \\ +\dfrac{1005,5\psi_{3,i}}{m_i}+9,81=0, \\ m_{i+1}-m_i+\dfrac{1005,5\psi_{2,i}}{m_i}-\dfrac{\psi_{3,i}}{2}=0, \\ \psi_{1,i+1}-\psi_{1,i}=0, \\ \psi_{2,i+1}-\psi_{2,i}+\psi_{1.i}=0, \\ \psi_{3,i+1}-\psi_{3,i}-\dfrac{202,206\cdot10^4\psi_{2,t}^2}{m_i^2}+ \\ +\dfrac{1005,5\psi_{2,i}\psi_{3,i}}{m_i^2}=0, \end{cases} \quad (13)$$

$i=\overline{1,149}$.

Из решения системы, которое найдено с помощью численного метода Ньютона-Рафсона, определены недостающие начальные условия для сопряженных переменных:

$\psi_1(0)=4,347\cdot10^{-3}$, $\psi_2(0)=0,634$, $\psi_3(0)=-32,497$.

Решение системы (9) с найденными начальными условиями для сопряженных функций в пакете Mahtcad с помощью функции rkfixed приведено на рисунке 1.

Решение задачи управления подъемом метеорологической ракеты на заданную высоту за фиксированное время

Начальное время $t1 := 0$

Конечное время $t2 := 150$

Параметры уравнений модели: $\beta := 2011 \quad g := 9.81$

Начальные условия: Правые части уравнений:

$$Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1620 \\ 4.347 \times 10^{-3} \\ 0.634 \\ -32.499 \end{pmatrix} \qquad D(t,Y) := \begin{bmatrix} Y_1 \\ \dfrac{\beta}{Y_2}\cdot\left(\dfrac{\beta\cdot Y_4}{2\cdot Y_2} - \dfrac{1}{2}\cdot Y_5\right) - g \\ -\left(\dfrac{\beta\cdot Y_4}{2\cdot Y_2} - \dfrac{1}{2}\cdot Y_5\right) \\ 0 \\ -Y_3 \\ \dfrac{\beta^2}{2\cdot(Y_2)^2}\cdot(Y_4)^2 - \dfrac{\beta}{2\cdot(Y_2)^2}\cdot Y_4\cdot Y_5 \end{bmatrix}$$

$Z := \mathrm{rkfixed}(Y, t1, t2, t2 - t1, D)$

$t := Z^{\langle 0 \rangle}$

$h := Z^{\langle 1 \rangle} \qquad v := Z^{\langle 2 \rangle} \qquad m := Z^{\langle 3 \rangle}$

$\Psi 1 := Z^{\langle 4 \rangle} \quad \Psi 2 := Z^{\langle 5 \rangle} \quad \Psi 3 := Z^{\langle 6 \rangle}$

Рисунок 1 – Решение системы уравнений

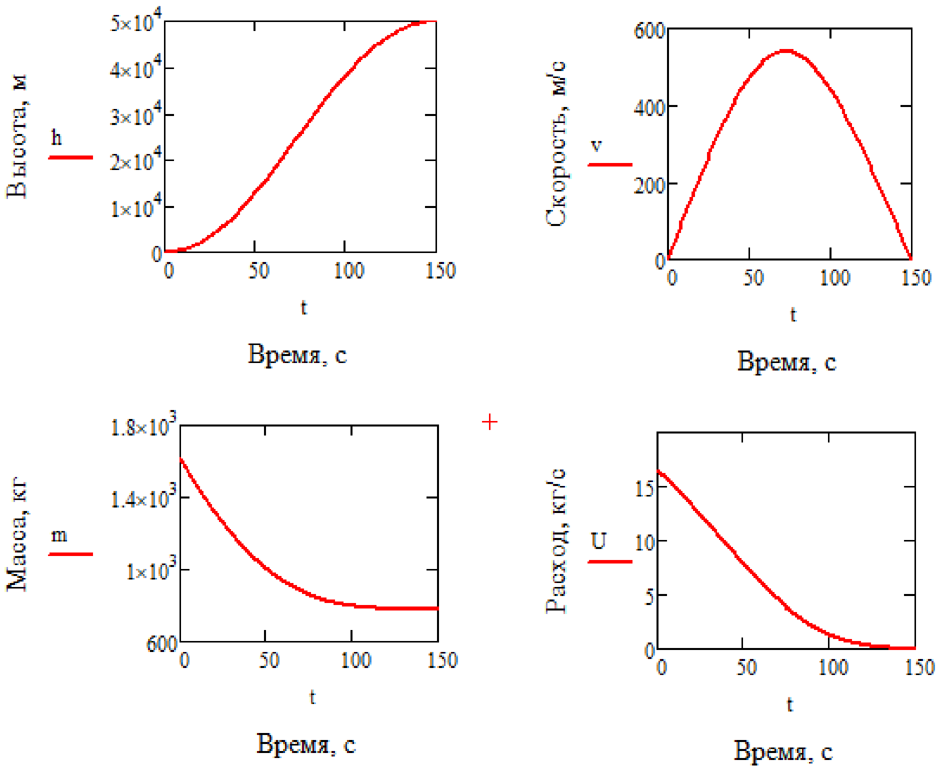

Рисунок 2 – Графики изменения высоты, скорости и массы ракеты, а также расхода топлива за период управления

Таким образом, в результате проведенных исследований методом вариационного исчисления решена задача подъема ракеты на заданную высоту за фиксированное время при минимальном расходе топлива. Задача нахождения оптимальных траекторий переменных и управления была сформулирована как краевая задача с недостающими начальными условиями, поиск которых реализован с помощью разностного метода решения краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мозжорина Т.Ю., Попов А.С.** Решение задачи оптимального управления вертикальным подъемом ракеты-зонда с уточнением модели аэродинамического сопротивления // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2021. – № 7. – С. 46-50.

2. **Лернер А.Я., Розенман Е.А.** Оптимальное управление. - М.: Энергия, 1970, – 360с.

3. **Истомин А.Л., Кривов М.В., Истомина А.А.** Принцип максимума Понтрягина в задаче управления подъемом метеорологической ракеты // Вестник АнГТУ – 2024. № 18. С. 194-198.

4. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. 4-е издание, - М.: Наука, 1983. – 392с.

5. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636с.

6. **Бедарев И.А., Кратова Ю.В., Федорова Н.Н., Федорченко И.А.** Методы вычислений в пакете Mathcad. – Новосибирск, 2013. – 163с.

7. **Моисеев Н.Н.** Элементы теории оптимальных систем. – М., Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука». 1975. – 528 с.