УДК 517

Мусева Татьяна Николаевна,
к.т.н., доцент, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: musevatn@mail.ru

РОЛЬ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В ПОДГОТОВКЕ КОНКУРЕНТНО-СПОСОБНОГО СПЕЦИАЛИСТА

Museva T.N.

THE ROLE OF NON-STANDARD TASKS FOR HIGHER MATHEMATICSIN THE PREPARATION OF A COMPETITIVE SPECIALIST

Аннотация. В статье рассматривается роль нестандартных задач в развитии творческого потенциала выпускника ВУЗа, в подготовке конкурентно-способного специалиста. Прослеживается связь творческой математической активности студента с последующим нестандартным подходом к изучению дисциплин в ВУЗе.

Ключевые слова: олимпиада, нестандартные задачи.

Abstract. The article discusses the role ofnon-standard tasks in the development of the creative potential of the university, in the preparation of a competitive specialist. The connection between the student's creativemathematical activity and the subsequent non-standard approach to the study of disciplines at the university is traced.

Keywords: olympiad, non-standard tasks.

В настоящее время растет потребность в нестандартно мыслящих специалистах, в творческой активности личности и развитом техническом мышлении, что требует особых подходов к обучению. Речь идет не только о развитии фундаментального компонента высшего образования, форм, методов и средств обучения, но и об организации олимпиадного движения, как средства развития творческих способностей студентов ВУЗов. К таким подходам относится решение нестандартных задач при подготовке к олимпиадам по высшей математике. Когда речь идет не только об обучении математике, но и формировании творческой личности, необходимость развития у студентов нестандартного мышления становится насущной задачей. При изучении курса высшей математики наряду с обычными заданиями рассматриваются задачи повышенной сложности. Студент должен развивать нетрадиционный взгляд на предмет, находить нестандартные подходы к решению поставленных задач, активно выстраивать свой учебный процесс.

Участие в олимпиадах – это способ самовыражения и самореализации для студентов, позволяющий значительно расширить свой кругозор, эрудицию и логическое мышление в нестандартной ситуации. Олимпиады позволяют студентам проверить и критически оценить свои знания и способности. Решение олимпиадных задач предполагает достаточно глубокое знание всех разделов математики, так как большинство задач требует владения умениями и навыками, полученными при изучении смежных разделов высшей математики. При решении таких задач необходимо владение логикой, интуицией и пространственным воображением. Нестандартные задачи полезны для процесса обучения. Они дают возможность глубже понять и усвоить теоретический материал, демонстрируют связь конкретных задач с основными теоретическими концепциями, изложенными в курсе математики.

Очевидно, что решение олимпиадных задач опирается на знание программного материала по высшей математике, но при этом требует от студента глубокого знания теории, умения применить эти знания к решению конкретных задач, проявив при этом самостоятельность мышления и определенную степень ответственности за выполненную работу. Такой специалист, несомненно, будет конкурентно-способным на рынке труда.

Подготовка к олимпиаде стимулирует совместное сотрудничество студента и преподавателя, что способствует формированию коммуникативных навыков при решении конкретных задач. Участие в олимпиадах является одним из методов формирования и развития профессиональной компетентности. Олимпиады позволяют студентам проверить и критически оценить свои знания и способности. Эта деятельность позволяет студенту развивать самостоятельность и творческий подход к изучению предмета, формировать способность логического мышления в нестандартных ситуациях. Он может сравнивать свои достижения с уровнем подготовки других студентов, оценивать свой творческий потенциал. Далее приведены решения нестандартных задач по различным разделам высшей математики.

Задача 1. Найдите условия, которым должны удовлетворять числа a, b, c, чтобы система $\begin{cases} 4x - 3y = a, \\ -5x + 4y = b, \\ 3x - 2y = c. \end{cases}$

была: а) совместна (укажите количество решений); б) несовместна.

Решение. а) Система совместна, если одно из уравнений, например, третье, есть линейная комбинация двух других: $\begin{cases} 4x - 3y = a, \\ -5x + 4y = b, \end{cases}$

откуда $x = 4a + 3b, y = 5a + 4b$. Подставляем эти значения в третье уравнение: $3(4a + 3b) - 2(5a + 4b) = c, 2a + b = c$.

Ответ: а) единственное решение $x = 4a + 3b, y = 5a + 4b$при

$2a + b = c$; б) несовместна при $a + b \neq c$.

Задача 2. Вычислите предел $l = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} * A^n$, где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Вычисляем степени матрицы:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Утверждение верно для $n = 2, 3, 4$. Используем метод математической индукции. Предполагая справедливость формулы для k= $2,3, \ldots, n$, докажем справедливость этой формулы для $k = n + 1$:

$$A^{n+1} = A^n * A = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Тогда предел

$$l = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n^2} & \frac{n+1}{n^2} & \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ 0 & \frac{1}{n^2} & \frac{n+1}{n^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Сколько различных пар непересекающихся подмножеств имеет множество из n элементов. Укажите наибольшее n, при котором количество пар не превосходит 2015.

Решение. Найдем количество различных пар непересекающихся подмножеств при условии, что в паре выделены первое и второе подмножества. Для каждого из n элементов есть 3 возможности: его можно или включить в первое подмножество, или включить во второе подмножество, или не включать ни в одно из них. Поэтому количество указанных пар равно 3^n. Среди них есть одна пара, в которой оба подмножества пусты. Оставшиеся $(3^n - 1)$ пары в свою очередь разбиваются на двойки совпадающих пар, если разрешить перестановку двух подмножеств. Таким образом, количество (неупорядоченных) пар подмножеств, из которых хотя бы одно не пусто, равно $\frac{(3^n-1)}{2}$. Всего же имеется $k = \frac{(3n-1)}{2} + 1 = \frac{(3n+1)}{2}$.

$n = 7 \Rightarrow k = \frac{3^7+1}{2} = 1094; n = 8 \Rightarrow k = \frac{3^8+1}{2} = 3281.$

Ответ: $k = \frac{3^7+1}{2} = 1094, n = 7$.

Задача 4. В зависимости от $k > 0$ исследуйте сходимость да$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i*k*\sin(ikn)}{15^n}$. В случае сходимости найдите его сумму, $i(i^2 = -1)$ – мнимая единица.

Решение. Используя формулу Эйлера $\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$, преобразуем сумму:

$S = \frac{k}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-kn}-e^{kn}}{15^n} = \frac{k}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-k}}{15}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{k}}{15}\right)^n\right).$

Полученные суммы – суммы членов геометрической прогрессии – сходятся, если прогрессия бесконечно убывающая:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \qquad b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad |q| < 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-k}}{15}\right)^n = \frac{\frac{e^{-k}}{15}}{1-\frac{e^{-k}}{15}} = \frac{e^{-k}}{15-e^{-k}} = \frac{1}{15e^{-k}-1}, 0 < \frac{e^{-k}}{15} < 1, k > 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{k}}{15}\right)^n = \frac{\frac{e^{k}}{15}}{1-\frac{e^{k}}{15}} = \frac{e^{k}}{15-e^{k}}, 0 < \frac{e^{k}}{15} < 1, k > 0.$$

Заметим, что $e^k < 15, k > 0$, т.е. $0 < k < \ln 15$.

Таким образом, при $k \geq \ln 15$ ряд расходится, и сумма

$$S = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{15e^{-k}-1} - \frac{e^k}{15-e^k}\right) = \frac{15k(1-e^{2k})}{2(15e^{-k}-1)(15-e^k)}, 0 < k < \ln 15.$$

Ответ: $S = \frac{15k(1-e^{2k})}{2(15e^{-k}-1)(15-e^k)}, 0 < k < \ln 15.$

В технических вузах, где высшая математика является профилирующей дисциплиной, нестандартные задачи дают возможность лучше понять и усвоить теоретический материал, демонстрируют связь практических задач с основными теоретическими положениями курса высшей математики. Решение нестандартных задач требует не только знаний, но и вырабатывает трудолюбие и упорство в достижении целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толстых О.Д. Нестандартные и прикладные задачи высшей математики: учеб. пособие: в 4 ч. / О.Д. Толстых. – Иркутск: ИрГУПС, 2017. – Ч. 2. – 160 с.
2. Толстых О.Д. Нестандартные и прикладные задачи высшей математики: учеб. пособие: в 4 ч. / О.Д. Толстых. – Иркутск: ИрГУПС, 2017. – Ч. 3. – 172 с.
3. Аракчеев С.А. Избранные задачи математических олимпиад для вузов. Новосибирск: Изд-во СГУПС, 2011. – 128 с.