УДК 539.3

Сенотова Светлана Анатольевна,
к.т.н., доцент, Ангарский государственный технический университет,
e-mail: sveta-senotova@mail.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕПНОЙ ЛИНИИ

Senotova S.A.

ABOUT CHAIN LINE STABILITY

Аннотация. Исследована устойчивость положения равновесия цепной линии.
Ключевые слова: цепная линия, положение равновесия, устойчивость.
Abstract. Stability of chain line equilibrium position was studied.
Keywords: chain line, equilibrium position, stability.

Рассмотрим тяжелую однородную нерастяжимую нить, длиной l, закрепленную в точках A и B (рисунок 1).

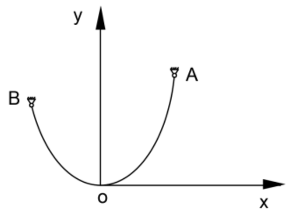

Рисунок 1 – Цепная линия

Уравнения движения нити в декартовых координатах имеют вид [1]

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T\,\frac{\partial y}{\partial s}\right) - q \qquad (1)$$

где t – время, s – дуговая координата нити, T – натяжение, g – вес единицы длины нити.

В каждой точке нити выполняется условие нерастяжимости

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1 \qquad (2)$$

В положении равновесия производные по времени равны нулю

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T\,\frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T\,\frac{\partial y}{\partial s}\right) - q = 0 \qquad (3)$$

Система (3) вместе с условием (2) допускает частное решение, соответствующее положению равновесия, в котором нить располагается по цепной линии

$$x_0 = a\,Arcsh\,\frac{2s-l}{2a}$$
$$y_0 = a\left(ch\,\frac{x_0}{a} - 1\right) \tag{4}$$
$$T_0 = H\,ch\,\frac{x_0}{a}$$

где $a = \frac{H}{g}$, H – положительная постоянная.

Рассмотрим отклонения от положения равновесия

$$x(s,t) = x_0 + u(s,t)$$
$$y(s,t) = y_0 + v(s,t) \tag{5}$$
$$T(s,t) = T_0 + \tau(s,t)$$

Подставим формулы (5) в систему (1). В результате получим систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T_0\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\tau\frac{\partial}{\partial s}\big(x_0 + u(s,t)\big)\right)$$
$$\tag{6}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = +\frac{\partial}{\partial s}\left(T_0\frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\tau\frac{\partial}{\partial s}\big(y_0 + v(s,t)\big)\right)$$

Умножим первое уравнение системы (6) на $\frac{\partial u}{\partial t}$, второе – на $\frac{\partial v}{\partial t}$, проинтегрируем каждое уравнение по s от 0 до l и сложим их. После преобразований, с учетом условия (2), получим первый интеграл

$$V = \int_0^l \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\right] ds = const \tag{7}$$

Этот интеграл определенно положителен и непрерывен по мере

$$\rho = \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\right] ds \tag{8}$$

На основании теоремы об устойчивости по одной мере [2] приходим к выводу, что положение равновесия (4) устойчиво по мере ρ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. / Д.Р. Меркин. – М.: Наука. – 1980.
2. Сиразетдинов Т. К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. / Т. К. Сиразетдинов. – Новосибирск: Наука. – 1987.